Kombinatorische Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (Branch-and-Bound für TSP)

Gegeben sei die folgende Entfernungstabelle für das *Rheinlandproblem*:

	AC	BN	D	F	K	W
AC	0	91	80	259	70	121
BN	91	0	77	175	27	84
D	80	77	0	232	47	29
F	259	175	232	0	189	236
K	70	27	47	189	0	55
W	121	84	29	236	55	0

Die Städtebezeichnungen sind dabei die KFZ-Kennzeichen der betreffenden Städte.

(a) Ermitteln Sie heuristisch eine möglichst gute TSP-Tour für das Rheinlandproblem. Nutzen Sie hierfür nacheinander die folgenden Methoden:

- Berechnung eines Minimalgerüstes,
- Konstruktion einer TSP-Tour durch Tiefensuche auf dem Minimalgerüst und
- Verbesserung dieser Tour durch 2-opt-Kantenaustausch.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Branch-and-Bound-Algorithmus aus der Vorlesung eine optimale Tour. Verwenden Sie hierbei die Tourlänge aus (a) als erste obere Schranke.

Lösung:

(a) Das Minimalgerüst enthält die Kanten

$$\{BN, K\}, \{D, W\}, \{D, K\}, \{AC, K\}, \{BN, F\}.$$

Tiefensuche auf dem Minimalgerüst mit Startpunkt AC liefert die Tour

$$AC - K - BN - F - D - W - AC.$$

Ein 2-opt-Kantenaustausch, $\{D, F\}$ und $\{AC, W\}$ werden gegen $\{AC, D\}$ und $\{F, W\}$ ausgetauscht, liefert die Tour

$$AC - K - BN - F - W - D - AC$$

mit Länge $B_{up} = 617$.

(b) Wir berechnen zunächst die Zeilenminima, ziehen die Werte von den Zeileneinträgen ab und berechnen anschließen die Spaltenminima und ziehen wiederum deren Werte von den Spalteneinträgen an.

	AC	BN	D	F	K	W	
AC	X	21	10	41	0	51	70
BN	21	X	50	0	0	57	27
D	8	48	X	55	18	0	29
F	41	0	57	X	14	61	175
K	0	0	20	14	X	28	27
W	49	55	0	59	26	X	29
	43	0	0	148	0	0	

Damit haben wir

$$B_{low} = 70 + 27 + 29 + 175 + 27 + 29 + 43 + 148 = 548$$

als untere Schranke.

Wir betrachten das Problem ohne die gerichtete Kante (D, W). Es entsteht

	AC	BN	D	F	K	W	
AC	X	21	10	41	0	23	70
BN	21	X	50	0	0	29	27
D	0	40	X	47	10	X	29 + 8
F	41	0	57	X	14	33	175
K	0	0	20	14	X	0	27
W	49	55	0	59	26	X	29
	43	0	0	148	0	0+28	

Damit entsteht

$$B_{low} = 548 + 8 + 28 = 584.$$

Wegen der Symmetrie genügt es, nur dem Pfad ohne (D, W) zu folgen.

Ohne (W, D) ergibt $B_{low} = 584 + 26 + 10 = 620 \geq B_{up}$, ist also ausgelotet.

Also mit (W, D), $B_{low} = 584$.

	AC	BN	F	K	W
AC	X	21	41	0	23
BN	21	X	0	0	29
D	0	40	47	10	X
F	41	0	X	14	33
K	0	0	14	X	0

Ohne (K, W): $B_{low} = 584 + 23 = 607$. Wir greifen diesen Pfad später wieder auf.

Mit (K, W) impliziert ohne (D, K). $B_{low} = 584$.

	AC	BN	F	K
AC	X	21	41	0
BN	21	X	0	0
D	0	40	47	X
F	41	0	X	14

Ohne (BN, F): $B_{low} = 584 + 41 = 625$, ausgelotet!

Mit (BN, F) impliziert ohne (F, BN): $B_{low} = 584 + 21 + 14 = 619$, ausgelotet!

Damit ist der ganze Suchbaum ab "mit (K, W)" augelotet. Also weiter im Zweig ohne (K, W) mit $B_{low} = 607$.

	AC	BN	F	K	W
AC	X	21	41	0	0
BN	21	X	0	0	6
D	0	40	47	10	X
F	41	0	X	14	10
K	0	0	14	X	X

Ohne (BN, F): $B_{low} = 607 + 14 = 621$, ausgelotet!

Also mit (BN, F), was ohne (F, BN) impliziert. $B_{low} = 607 + 10 = 617$, ausgelotet!

Also ist die schon bekannte Tour optimal!

Aufgabe 2 (Schnittebenen für TSP) 10 Punkte

Auf der Homepage der Veranstaltung finden Sie die LP-Relaxation `de20.lp` für eine TSP-Instanz mit 20 deutschen Städten. Beachten Sie dabei:

- Die Städte werden durch die Indices $1, \ldots, 9, a, \ldots, k$ identifiziert.
- Da die Originaldaten als untere Dreiecksmatrix vorlagen, gilt hier, im Gegensatz zu den Beispielen aus der Vorlesung, dass stets der *erste* Index der größere ist.

Finden Sie für diese TSP-Instanz eine optimale Lösung. Lösen Sie hierzu die LP-Relaxation, identifizieren Sie verletzte Ungleichungen und fügen diese der LP-Relaxation hinzu. Wiederholen Sie diese Schritte, bis Sie eine zulässige und damit optimale Tour erhalten.

Lösung: siehe Homepage