Kombinatorische Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Branch-and-Bound für ILP)

Lösen Sie das folgende ganzzahlige lineare Programm mittels GLPK und Branch-and-Bound.

- Nutzen Sie dabei ausschließlich den LP-Solver des GLPK, also nicht die Möglichkeit, Variablen auf $\mathbb{Z}$ beschränken zu können.
- Verwenden Sie als Selektionsstrategie "Maximum Upper Bound".
- Zeichen Sie den Suchbaum und geben Sie für jedes Blatt an, welcher Fall von Definition 4.7 (Auslotung eines Problems) vorliegt.

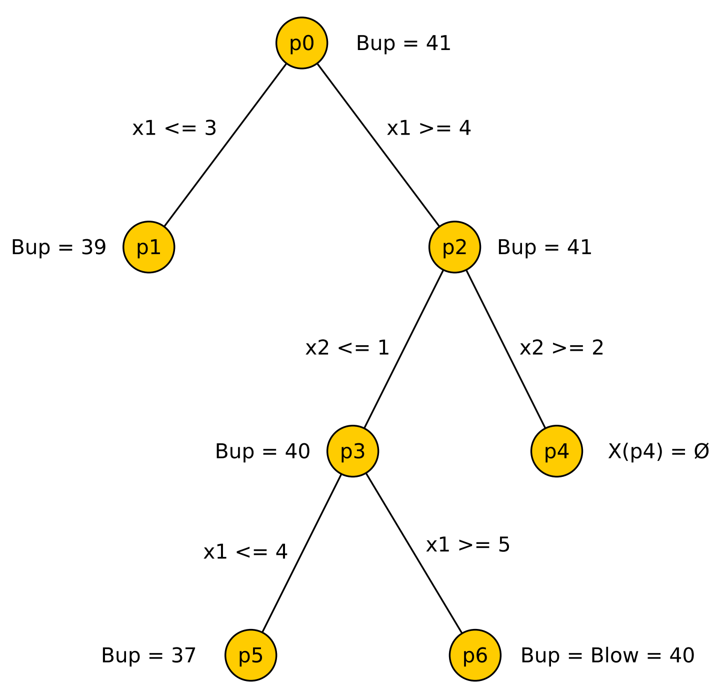
$$\max 8x_1 + 5x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ 9x_1 & + & 5x_2 & \leq & 45 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

Bemerkung: siehe Beispiel 4.5.

Lösung:



LPs siehe Homepage.

Aufgabe 2 (Rucksackproblem)

Gegeben sei das folgende Rucksackproblem:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 7 \\ (p_j) & = & (40, \; 80, \; 10, \; 10, \; 4, \; 20, \; 60), \\ (w_j) & = & (40, \; 50, \; 30, \; 10, \; 10, \; 40, \; 30), \\ C & = & 100 \end{array}$$

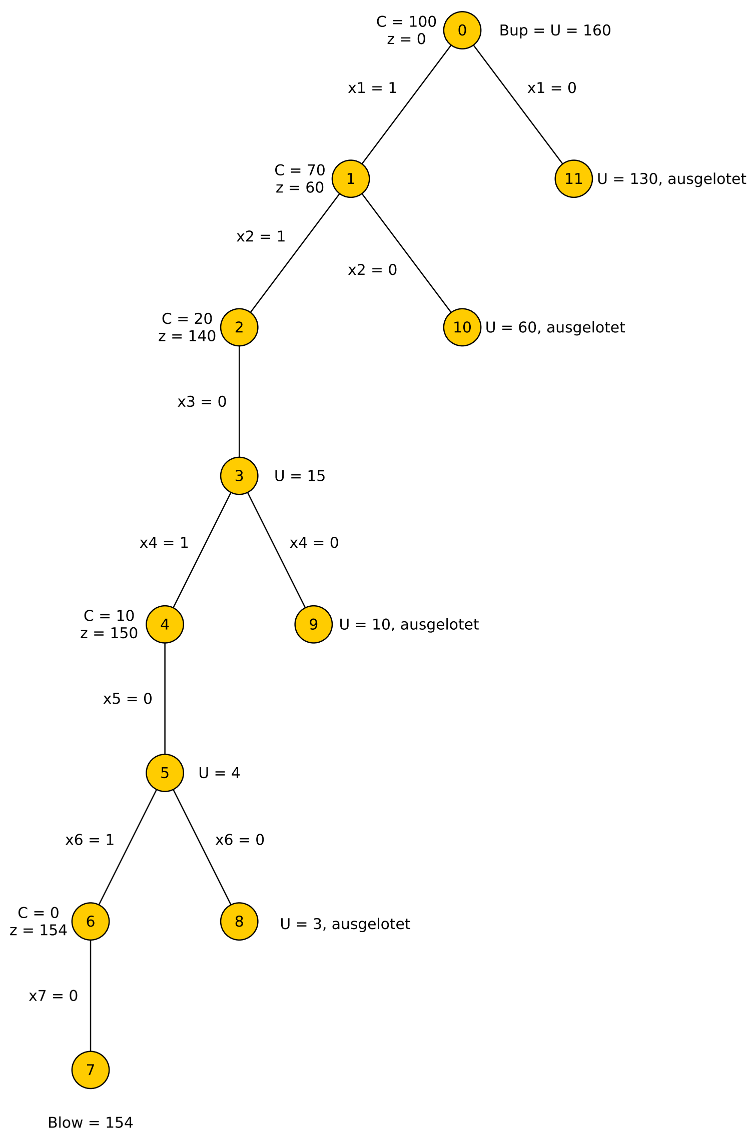
(a) Bringen Sie das Rucksackproblem in eine Form, die die Voraussetzungen von Folie 228 erfüllt.

(b) Lösen Sie das Rucksackproblem mit dem Algorithmus von Horowitz und Sahni. Zeichnen Sie auch den Suchbaum (vgl. Folie 237).

Lösung: Wir sortieren zunächst die Gegenstände nach spezifischen Profit. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcl} (p_j) & = & (60, \; 80, \; 40, \; 10, \; 20, \; 4, \; 10), \\ (w_j) & = & (30, \; 50, \; 40, \; 10, \; 40, \; 10, \; 30). \end{array}$$

Damit führen wir das Branch-and-Bound-Verfahren von Horowitz und Sahni durch.



Also ist $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0$ die optimale Lösung.

Aufgabe 3 (Variablenreduktion)

Gegeben sei das folgende Rucksackproblem:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 8 \\ (p_j) & = & (15, \ 100, \ 90, \ 60, \ 40, \ 15, \ 10, \ 1), \\ (w_j) & = & (2, \ 20, \ 20, \ 30, \ 40, \ 30, \ 60, \ 10), \\ C & = & 102 \end{array}$$

(a) Berechnen Sie eine zulässige Lösung mit Hilfe des Greedy-Algorithmus (Algorithmus 4.11).

(b) Zeigen Sie, dass für jede optimale Lösung $x_7 = 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für jede optimale Lösung $x_2 = 1$ gilt.

(d) Formulieren Sie ein äquivalentes Rucksackproblem, das nur noch sechs Variablen enthält.

Lösung:

(a) Mit dem Greedy-Algorithmus ergibt sich die Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 1, x_5 = x_7 = x_8 = 0.$$

Der Gesamtprofit beträgt damit $15 + 100 + 90 + 60 + 15 = 280$.

(b) Angenommen es gilt $x_7 = 1$. Dann verbleibt eine Kapazität von $C - w_7 = 102 - 60 = 42$. Damit können wir höchsten einen Profit von $p_1 + p_2 + p_3 + p_7 = 15 + 100 + 90 + 10 = 215$ erreichen. Da wir schon eine untere Schranke von 280 haben, folgt, dass $x_7 = 0$ gelten muss.

(c) Angenommen es gilt $x_2 = 0$. Wir berechnen eine obere Schranke für diesen Fall mit dem stetigen Rücksackproblem. Für dieses ergibt sich in diesen Fall die optimale Lösung

$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 1, x_6 = \frac{1}{3}, x_2 = x_7 = x_8 = 0.$$

Damit ergibt sich

$$p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + \frac{1}{3} \cdot p_6 = 15 + 90 + 60 + 40 + 5 = 210$$

als obere Schranke für den Gesamtprofit. Da wir schon eine untere Schranke von 280 haben, muss $x_2 = 1$ gelten.

(d) Wir können Gegenstand 7 aus dem Problem streichen. Weiterhin können wir Gegenstand 2 erreichen, müssen dann aber die Kapazität um w_2 vermindern. Es entsteht damit das Problem:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 6 \\ (p_j) & = & (15, \ 90, \ 60, \ 40, \ 15, \ 1), \\ (w_j) & = & (2, \ 20, \ 30, \ 40, \ 30, \ 10), \\ C & = & 82 \end{array}$$

Jede optimale Lösung für dieses Problem erweitert um den ursprünglichen Gegenstand 2 ist dann eine optimale Lösung des Originalproblems.