Kombinatorische Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (Schnittebenen)

Gegeben sei das ganzzahlige lineare Programm

$$\max 4x_1 + 5x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie eine optimale Lösung der LP-Relaxation.

(b) Ermitteln Sie für die optimale Lösung der LP-Relaxation alle möglichen Schnittrestriktionen.

(c) Fügen Sie die in (b) ermittelte Schnittrestriktion (Sie werden feststellen, dass es nur eine gibt) der LP-Relaxation hinzu und bestimmen Sie eine neue optimale Lösung der aktuellen LP-Relaxation.

(d) Leiten Sie aus der x_1-Zeile der aktuellen optimalen Lösung eine weitere Schnittrestriktion her, fügen Sie diese der LP-Relaxation hinzu und lösen Sie die LP-Relaxation (die optimale Lösung sollte nun ganzzahlig sein).

(e) Zeichnen Sie die Nebenbedingungen des ILP, die hinzugefügten Schnittrestriktionen, die Zielfunktion und die optimale Lösung.

Lösung:

(a) Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_3	3	5	1	0	0	20
x_4	1	4	0	1	0	12
x_5	1	0	0	0	1	4
z	-4	-5	0	0	0	0

Endtableau der LP-Relaxation:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	0	0	1	4
x_2	0	1	$1/5$	0	$-3/5$	$8/5$
x_4	0	0	$-4/5$	1	$7/5$	$8/5$
z	0	0	1	0	1	24

(b) Herleitung einer Schnittrestriktion aus der x_2-Zeile:

$$\begin{aligned}
& x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 = \frac{8}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & x_2 + \left(0 + \frac{1}{5}\right) x_3 + \left(-1 + \frac{2}{5}\right) x_5 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & x_2 - x_5 - 1 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_5 + \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Aus der rechten Seite ergibt sich wegen $x_3, x_5 \geq 0$ und der Ganzzahligkeit der linken Seite die Schnittrestriktion:

$$-\frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_5 \leq -\frac{3}{5}$$

Herleitung einer Schnittrestriktion aus der x_4-Zeile:

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{5}x_3 + x_4 + \frac{7}{5}x_5 = \frac{8}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(-1 + \frac{1}{5}\right) x_3 + x_4 + \left(2 + \frac{2}{5}\right) x_5 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & x_4 - x_3 + 2x_5 - 1 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_5 + \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Aus der rechten Seite der Gleichung entsteht dann die gleiche Schnittrestriktion wie bei der x_2 Zeile.

(c) Wir nehmen die Gleichung

$$-\frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_5 + s_1 = -\frac{3}{5}$$

hinzu. Die Variable s_1 ist die Schlupfvariable für diese Schnittrestriktion.

Das erweiterte Tableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**
x_1	1	0	0	0	1	0	4
x_2	0	1	1/5	0	−3/5	0	8/5
x_4	0	0	−4/5	1	7/5	0	8/5
s_1	0	0	−1/5	0	−2/5	1	−3/5
z	0	0	1	0	1	0	24

Wir nutzen den dualen Simplexalgorithmus. Neues Optimaltableau der LP-Relaxation:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**
x_1	1	0	0	−1/3	0	4/3	8/3
x_2	0	1	0	1/3	0	−1/3	7/3
x_3	0	0	1	−2/3	0	−7/3	1/3
x_5	0	0	0	1/3	1	−4/3	4/3
z	0	0	0	1/3	0	11/3	67/3

(d) Herleitung einer Schnittrestriktion aus der x_1-Zeile:

$$\begin{aligned}
& x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}s_1 = \frac{8}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 + \left(-1 + \frac{2}{3}\right) x_4 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) s_1 = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 - x_4 + s_1 - 2 = -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aus der rechten Seite entsteht dann die Schnittrestriktion:

$$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 \leq -\frac{2}{3}$$

Wir nehmen die Gleichung

$$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + s_2 = -\frac{2}{3}$$

hinzu. Die Variable s_2 ist die Schlupfvariable für diese Schnittrestriktion.

Das erweiterte Tableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	**b**
x_1	1	0	0	$-1/3$	0	$4/3$	0	$8/3$
x_2	0	1	0	$1/3$	0	$-1/3$	0	$7/3$
x_3	0	0	1	$-2/3$	0	$-7/3$	0	$1/3$
x_5	0	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	0	$4/3$
s_2	0	0	0	$-2/3$	0	$-1/3$	1	$-2/3$
z	0	0	0	$1/3$	0	$11/3$	0	$67/3$

Der duale Simplexalgorithmus liefert:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	**b**
x_1	1	0	0	0	0	$3/2$	$-1/2$	3
x_2	0	1	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	2
x_3	0	0	1	0	0	-2	-1	1
x_5	0	0	0	0	1	$-3/2$	$1/2$	1
x_4	0	0	0	1	0	$1/2$	$-3/2$	1
z	0	0	0	0	0	$7/2$	$1/2$	22

Damit haben wir eine optimale ganzzahlige Lösung.

(e) Wir lösen alle Schlupfvariablen nach den Strukturvariablen auf (siehe Starttableau):

$$\begin{aligned} x_3 &= 20 - 3x_1 - 5x_2 \\ x_4 &= 12 - x_1 - 4x_2 \\ x_5 &= 4 - x_1 \end{aligned}$$

Wir setzen dies in die erste Schnittrestriktion ein:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_5 \leq -\frac{3}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{5}(20 - 3x_1 - 5x_2) - \frac{2}{5}(4 - x_1) \leq -\frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 \leq -x_1 + 5 \end{aligned}$$

Die erste Schnittrestriktion als Gleichung geschrieben lautet aufgelöst nach s_1:

$$s_1 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5$$

Diese und die anderen Gleichungen für die Schlupfvariablen setzen wir nun in die zweite Schnittrestriktion ein:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 \leq -\frac{2}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5\right) \leq -\frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{15}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{15}x_5 \leq -\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{15}(20 - 3x_1 - 5x_2) - \frac{2}{3}(12 - x_1 - 4x_2) - \frac{2}{15}(4 - x_1) \leq -\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 \leq -\frac{1}{3}x_1 + 3 \end{aligned}$$

schwarze Linien : Nebenbedingungen
blaue Linien : Schnittrestriktionen
rote Linie: Zielfunktion
schwarzer Punkt: optimale Lösung der LP-Relaxation
blauer Punkt: optimale Lösung LP-Relaxation mit erster Schnittrestriktion
roter Punkt: optimale ganzzahlige Lösung (beide Schnittrestriktionen)