Kombinatorische Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (3-Sat und Vertex Cover)

Wir betrachten die folgende aussagenlogische Formel Φ in 3KNF:

$$(x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3).$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der entsteht, wenn wir das 3-SAT-Problem für Φ polynomiell in VC transformieren.

(b) Berechnen Sie mit dem GLPK eine optimale Knotenüberdeckung für den Graph aus (a).

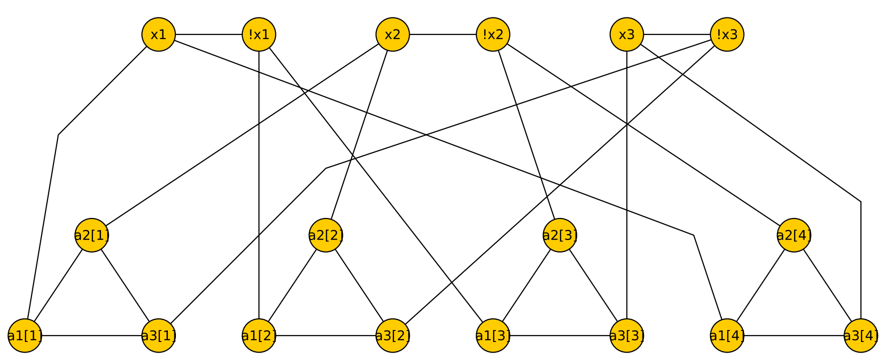
(c) Beantworten Sie mit dem Ergebnis für (b) die Frage, ob Φ erfüllbar ist.

Falls die Formel erfüllbar ist: Geben Sie eine Belegung an, die Φ erfüllt.

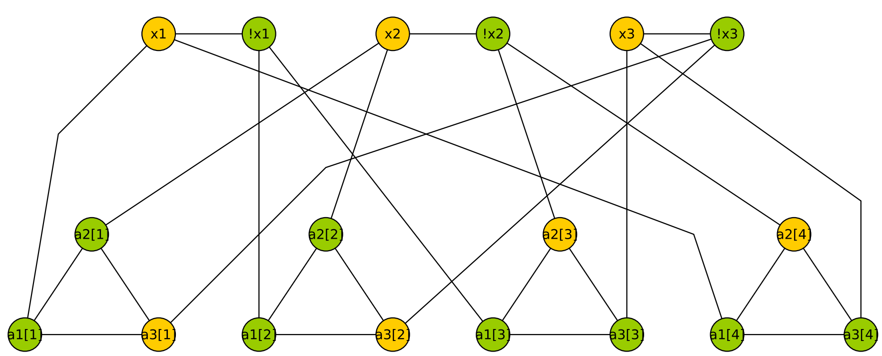
(d) Formulieren Sie ein ganzzahliges LP, mit dem Sie direkt (also ohne den Umweg über VC) entscheiden können, ob Φ erfüllbar ist.

Lösung:

(a)



(b) LP siehe Homepage.



(c) Die Formel Φ ist mit $x_1 = x_2 = x_3 = \texttt{false}$ erfüllbar.

(d) LP siehe Homepage.

Aufgabe 2 ($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$.
Das Problem Independent Set lautet:

> Existiert eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| \geq k$, die keine adjazenten Knoten enthält?

Das Problem Clique lautet:

> Existiert eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| \geq k$, die eine Clique (also einen vollständigen Untergraphen) bildet?

Zeigen Sie:

(a) Independent Set ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(b) Clique ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Hinweis: Als wesentlichen Teil für (a) zeigen Sie Vc $\leq_p$ Independent Set. In (b) zeigen Sie dann Independent Set $\leq_p$ Clique.

Lösung:

(a)
1. Wir können in polynomieller Zeit prüfen, ob eine Menge U eine unabhängige Menge (independent Set) ist.
2. Wir zeigen Vc $\leq_p$ Independent Set mithilfe des folgenden Lemmas:

$$U \text{ ist eine Knotenübderdeckung} \quad \Longleftrightarrow \quad V \setminus U \text{ ist eine unabhängige Menge.}$$

„$\Rightarrow$“: Sei U eine Knotenüberdeckung und $U' = V \setminus U$.
Annahme: U' enthält zwei adjazente Knoten v, w, also $e := \{v, w\} \in E$.
Dann gilt $v, w \notin U$ und somit wird die Kante e durch U nicht abgedeckt. Widerspruch!
„$\Leftarrow$“: Sei U eine unabhängige Menge und $U' = V \setminus U$.
Annahme: U' ist keine Knotenüberdeckung, d. h. es existiert eine Kante $e = \{v, w\} \in E$ mit $v, w \notin U'$.
Dann gilt $v, w \in U$. Da v, w adjazent sind, ist damit U keine unabhängige Menge. Widerspruch!
Damit ist das Lemma beweisen. Aus dem Lemma folgt nun, dass eine Knotenüberdeckung U mit $|U| \leq k$ genau dann existiert, wenn eine unabhängige Menge U' mit $|U'| \geq |V| - k$ existiert.

(b)
1. Wir können in polynomieller Zeit prüfen, ob eine Menge U eine Clique bildet.
2. Wir zeigen Independent Set $\leq_p$ Clique mithilfe des folgenden Lemmas:

$$U \text{ ist unabhängige Menge} \quad \Longleftrightarrow \quad U \text{ ist Clique in } G^C.$$

Hinweis: G^C bezeichnet den Komplementgraphen von G.
Beweis: Zwei Knoten v, w sind genau dann in einer unabhängigen Menge U, wenn $\{v, w\} \notin E$ gilt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\{v, w\} \in E^C$ gilt, also $\{v, w\}$ eine Kante des Komplementgraphen ist.
Aus dem Lemma folgt nun, dass eine unabhängige Menge U mit $|U| \geq k$ genau dann existiert, wenn der Graph G^C eine Clique $\geq k$ hat.

Aufgabe 3 (Hamiltonsche Kreise und Wege)

(a) Zeigen Sie: TSP ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(b) Zeigen Sie: HP ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(c) Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V| - 1$.
Das Problem LONGEST PATH lautet:

– Enthält G einen einfachen Weg mit einer Länge $\geq k$?

Zeigen Sie: LONGEST PATH ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(d) Zeigen Sie: LONGEST PATH ist für gerichtete azyklische Graphen (DAGs) in $\mathcal{P}$.

Lösung:

(a)
1. Für einen Kreis $K = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ als Lösungsvorschlag können wir in polynomieller Zeit prüfen, ob K ein hamiltonscher Kreis ist und $c(K) \leq k$ gilt.
2. Wir zeigen HC $\leq_p$ TSP.
   Sei $G = (V, E)$ der Graph, für den entschieden werden soll, ob er hamiltonsch ist. Wir definieren dann G' als einen vollständigen Graphen mit V als Knotenmenge. Als Kostenfunktion c definieren wir
   $$c(\{v, w\}) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \{v, w\} \in E, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Weiterhin sei $k = 0$.
   „$\Rightarrow$“: Wenn G einen hamiltonschen Kreis enthält, dann hat dieser Kreis in G' die Länge 0.
   „$\Leftarrow$“: Wenn G' eine TSP-Tour mit einer Länge 0 enthält, dann muss diese TSP-Tour ausschließlich aus Kanten bestehen, die auch in G enthalten sind. Also bildet die TSP-Tour in G einen hamiltonschen Kreis.

(b)
1. Für einen Weg $W = (v_1, \dots, v_n)$ als Lösungsvorschlag können wir in polynomieller Zeit prüfen, ob W ein hamiltonscher Weg ist.
2. Wir zeigen HC $\leq_p$ HP.
   Sei $G = (V, E)$ der Graph, für den entschieden werden soll, ob er hamiltonsch ist und es sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten von G. Wir definieren den Graphen G' wie folgt:
   – Wir erweitern G um die zusätzlichen Knoten s, t, v'.
   – Wir nehmen folgende Kanten hinzu: $\{s, v\}, \{v', t\}$ und $\{v', w\}$ für alle Knoten w, die in G adjazent zu v sind.

   „$\Rightarrow$“: Es sei K ein hamiltonscher Kreis in G. Dann können wir K so wählen, dass v der Anfangsknoten ist, also $K = (v = v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Da v' die gleichen Nachbarn wie v hat, muss v_n ein Nachbar von v' sein. Somit ist $(s, v, v_2, \dots, v_n, v', t)$ ein hamiltonscher Weg in G'.
   „$\Leftarrow$“: Sei W ein hamiltonscher Weg in G'. Da die Knoten s und t den Grad 1 haben, muss W in s beginnen und in t enden (oder umgekehrt). Weiterhin muss v der zweite Knoten und v' der vorletzte Knoten in W sein. Damit enthält W zwischen v (inklusive) und v' (exklusive) alle Knoten von G genau einmal.
   Es sei w der Vorgänger von v' in W. Da v' die gleichen Nachbarn wie v hat, muss es in G eine Kante zwischen v und w geben. Damit ist der Kreis der entsteht, wenn wir wie in W von v nach w laufen und dann wieder zu v gehen, ein hamiltonscher Kreis.

(c)
1. Für einen Weg W als Lösungsvorschlag können wir in polynomieller Zeit prüfen, ob er eine Länge $\geq k$ hat.

2. Wir zeigen $\text{HP} \leq_p$ LONGEST PATH.

   Es sei $G = (V, E)$ der Graph, für den entschieden werden soll, ob er einen hamiltonschen Weg enthält. Wir definieren den Graphen G' wie folgt:

   – Wir erweitern G um die zusätzlichen Knoten s', s, t, t'.
   – Wir nehmen folgende Kanten hinzu: $\{s', s\}$, $\{t, t'\}$, $\{s, v\}$ für alle $v \in V$, $\{w, t\}$ für alle $w \in V$.

   Weiterhin sei $k = |V| + 3$.

   „$\Rightarrow$“: Es sei W ein hamiltonscher Weg in G mit Anfangsknoten v und Endknoten w. Dann hat W die Länge $|V| - 1$. Dann ist $(s', s, v, \ldots, w, t, t')$ ein einfacher Weg in G' mit Länge $|V| + 3$.

   „$\Leftarrow$“: Es sei W ein einfacher Weg in G' mit einer Länge $|V| + 3$. G' enthält $|V| + 4$ Knoten. Daher muss W ein hamiltonscher Weg für G' sein. Da s' und t' den Grad 1 haben, mit s bzw. t als Nachbar, muss W mit s', s beginnen und mit t, t' enden. Damit ist der Weg zwischen s und t (jeweils exklusive) innerhalb von W ein hamiltonscher Weg für G.

(d) Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter azyklischer Graph. Ein längster einfacher Weg in G muss in einem Knoten v mit $\text{indeg}(v) = 0$ beginnen und einem Knoten w mit $\text{outdeg}(w) = 0$ enden, denn ansonsten könnte man den Weg um eine weitere Kante verlängern.

Wir definieren den Graphen G' wie folgt:

– Wir erweitern G um die zusätzlichen Knoten s und t.
– Wir nehmen folgende Kanten hinzu: (s, v) für alle v mit $\text{indeg}(v) = 0$, (w, t) für alle w mit $\text{outdeg}(w) = 0$.

Damit hat G' genau einen Knoten mit Eingangsgrad 0 (nämlich s) und genau einen Knoten mit Ausgangsgrad 0 (nämlich t).

Es sei $(s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = t)$ eine topologische Sortierung der Knoten von G'.

Wir berechnen nun die Länge eines längsten Weges in G' mittels dynamischer Programmierung. Bezeichne $l(v)$ die Länge eines längsten Weges von s nach v. Dann können wir $l(v)$ iterativ wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} l(v_0) &= 0, \\ l(v_i) &= 1 + \max_{\{0 \leq j < i \mid (v_j, v_i) \in E\}} l(v_j) \text{ für } i = 1, \ldots, n+1. \end{aligned}$$

Dann ist $l(t) = l(v_{n+1})$ die Länge eines längsten Weges in G' und somit $l(t) - 2$ die Länge eines längsten Weges in G.