# Kombinatorische Optimierung

## Lösungen zu Aufgabenblatt 2

### Aufgabe 1 (Ganzzahlige Ecken)

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht total unimodular ist, dass das Polyeder $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ aber trotzdem für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^3$ nur ganzzahlige Ecken hat.

(b) Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Das Polyeder $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ hat für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^5$ nur ganzzahlige Ecken.

**Lösung:**

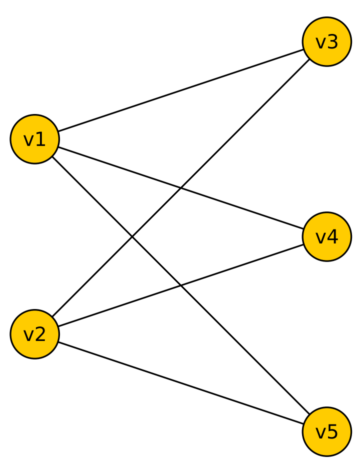
(a) Wir wählen die beiden ersten Zeilen und die beiden letzten Spalten von $\mathbf{A}$. Damit erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

Also ist $\mathbf{A}$ nicht total unimodular.

Es gilt aber $\det(\mathbf{A}) = -1$, womit $\mathbf{A}$ unimodular ist. Damit besteht das Polyeder $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ nur aus einem Punkt, der nach Lemma 1.12 ganzzahlig ist.

(b) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist die Inzidenzmatrix des folgenden bipartiten Graphen:



Nach Satz 1.28 ist $\mathbf{A}$ total unimodular, somit auch $-\mathbf{A}$ (Lemma 1.18). Mit Folgerung 1.17 ergibt sich, dass das Polyeder

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

nur ganzzahlige Ecken hat.

## Aufgabe 2 (Bipartite Graphen)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit* genau dann, wenn sich die Knotenmenge $V$ in zwei disjunkte Teilmengen $V_1$ und $V_2$ aufteilen lässt (also $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), so dass zwischen den Knoten innerhalb der Teilmengen keine Kanten verlaufen. Für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ gilt also entweder $v \in V_1 \wedge w \in V_2$ oder $v \in V_2 \wedge w \in V_1$.

(a) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

$$G \text{ ist bipartit } \iff G \text{ hat keinen Kreis ungerader Länge}$$

(b) Beweisen Sie Satz 1.28: Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ die Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist, dann ist $\mathbf{A}$ total unimodular.

**Hinweis:** Schauen Sie sich die Beweise von Lemma 1.26 und Satz 1.27 an und überlegen Sie sich, welcher Teil dieser Beweise sich nicht auf (ungerichtete) bipartite Graphen übertragen lässt. Es genügt, für diesen Teil einen alternativen Beweis zu finden. Hierbei ist (a) hilfreich.

**Lösung:**

(a) "$\Rightarrow$": Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit $V = V_1 + V_2$ und es sei $K = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ ein Kreis in $G$. O.B.d.A. gelte $v_1 \in V_1$. Damit folgt:

- $v_1, v_3, v_5, \ldots \in V_1$ und
- $v_2, v_4, v_6, \ldots \in V_2$.

Da $v_k \in V_2$ gelten muss (wegen der Kante $\{v_1, v_k\}$), folgt, dass $k$ gerade ist.

"$\Leftarrow$": Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, der keinen Kreis ungerader Länge enthält. O.B.d.A. sei $G$ zusammenhängend, ansonsten wenden wir die folgende Konstruktion auf jede Zusammenhangskomponente an.

Es sei $a \in V$ ein beliebiger Knoten von $G$. Wir definieren:

- $V_1 = \{v \in V | \text{Der Abstand zwischen } a \text{ und } v \text{ ist gerade}\}$,
- $V_2 = \{v \in V | \text{Der Abstand zwischen } a \text{ und } v \text{ ist ungerade}\}$.

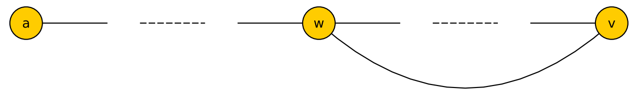
Offensichtlich bilden $V_1$ und $V_2$ eine Partition von $V$. Anmerkung: Zu den Abständen können wir einen entsprechenden Kürzeste-Wege-Baum $B$ konstruieren, der aus kürzesten Wegen von $a$ zu allen anderen Knoten besteht.

Annahme: Es existiert eine Kante zwischen zwei Knoten aus $V_1$ oder zwischen zwei Knoten aus $V_2$.

O.B.d.A. liege diese Kante zwischen den Knoten $v, w \in V_1$.

Es sei $W_v$ der Weg von $a$ nach $v$ in $B$ und $W_w$ sei der Weg von $a$ nach $w$ in $B$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

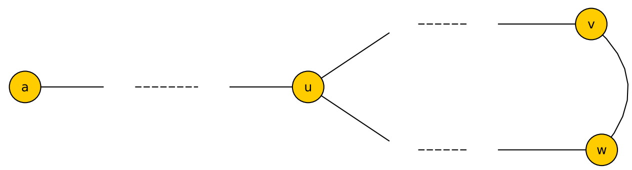
1. $w$ liegt auf $W_v$ oder $v$ liegt auf $W_w$.
   O.B.d.A. betrachten wir den Fall, dass $w$ auf $W_v$ liegt.




Da sowohl $v$ als auch $w$ einen geraden Abstand von $a$ haben, hat der Teilweg von $w$ nach $v$ innerhalb von $W_v$ eine gerade Länge. Mit der Kante $\{v, w\}$ ergibt sich ein Kreis ungerader Länge. Widerspruch!

2. Weder liegt $w$ auf $W_v$ noch $v$ auf $W_w$.

   Dann haben die Wege $W_v$ und $W_w$ einen letzten gemeinsamen Knoten $u$ (es kann auch $u = a$ gelten).




   (a) Gilt $u \in V_1$, dann haben die Wege von $u$ nach $v$ und von $u$ nach $w$ beide gerade Länge. Mit der Kante $\{v, w\}$ ergibt sich ein Kreis ungerader Länge. Widerspruch!

   (b) Gilt $u \in V_2$, dann haben die Wege von $u$ nach $v$ und von $u$ nach $w$ beide ungerade Länge. Mit der Kante $\{v, w\}$ ergibt sich ein Kreis ungerader Länge. Widerspruch!

(b) Die Richtung "$\Rightarrow$" von Lemma 1.26 lässt sich nicht übertragen. Da in den Spaltenvektoren für die Kanten im gerichteten Fall sowohl 1 als auch $-1$ auftaucht, konnten wir durch eine geschickte Wahl der $\alpha_l$ dafür sorgen, dass sich für jeden Knoten die Einträge für diesen Knoten in den Spaltenvektoren aufheben.

Im bipartiten Fall argumentieren wir nun wie folgt: Es sei $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ein Kreis und $j_1, \ldots, j_k$ seien die zugehörigen Spaltenvektoren der beteiligten Kanten (vgl. Folie 48). Nach (a) muss dieser Kreis gerade Länge haben. Wir bilden nun die Linearkombination

$$\mathbf{a}^{j_1} - \mathbf{a}^{j_2} + \mathbf{a}^{j_3} - \mathbf{a}^{j_4} \pm \cdots - \mathbf{a}^{j_k}.$$

Weil $k$ gerade ist, geht dies genau auf, d. h. das letzte Vorzeichen ist ein Minus. Durch die unterschiedlichen Vorzeichen heben sich die Spaltenvektoren für jeden Knoten wieder auf. Also gilt

$$\mathbf{a}^{j_1} - \mathbf{a}^{j_2} + \mathbf{a}^{j_3} - \mathbf{a}^{j_4} \pm \cdots - \mathbf{a}^{j_k} = \mathbf{0}.$$

## Aufgabe 3 (Kantendisjunkte Wege)

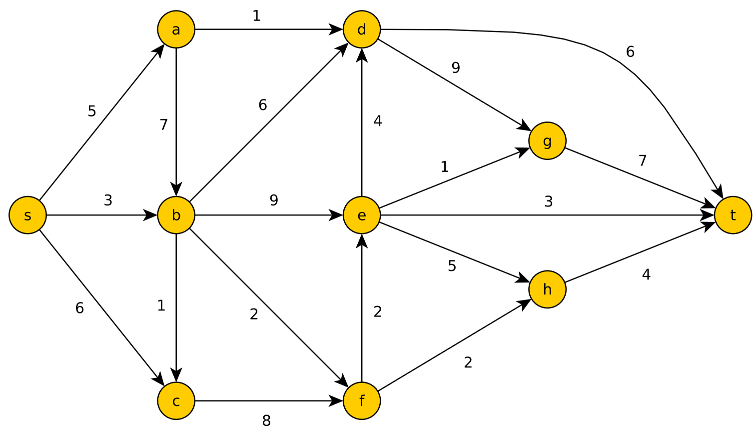
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Startknoten $s \in V$, ein Zielknoten $t \in V$ mit $s \neq t$ und eine Kosten- bzw. Längenfunktion $c : E \to \mathbb{R}$ auf den gerichteten Kanten.

Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung des Problems, einen kürzesten Weg von $s$ nach $t$ zu finden. Statt genau einem Weg suchen wir $k$ Wege von $s$ nach $t$, die

- in der Summe möglichst kurz sind und
- deren Kanten alle paarweise verschieden sind. Jede Kanten von $G$ tritt also in höchstens einem der Wege auf, die Wege sind *kantendisjunkt*.

Der Parameter $k$ ist dabei für ein konkretes Problem fest, z. B. $k = 2$, und stellt somit keine Entscheidungsvariable dar. Für $k = 1$ erhalten wir das normale kürzeste Wegeproblem.

(a) Stellen Sie für den folgenden Graphen und $k = 2$ ein entsprechendes LP auf und lösen Sie dieses mit dem GLPK.




(b) Ist die Koeffizientenmatrix des Problems total unimodular? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wenn $k$ zu groß ist, wird es keine zulässige Lösung geben.

Wie kann man allgemein das größte $k$ bestimmen, für das eine zulässige Lösung existiert?

Geben Sie für den Graphen aus (a) ein LP an, mit dem das größte $k$ bestimmt werden kann und berechnen Sie mit dem GLPK diesen Wert.

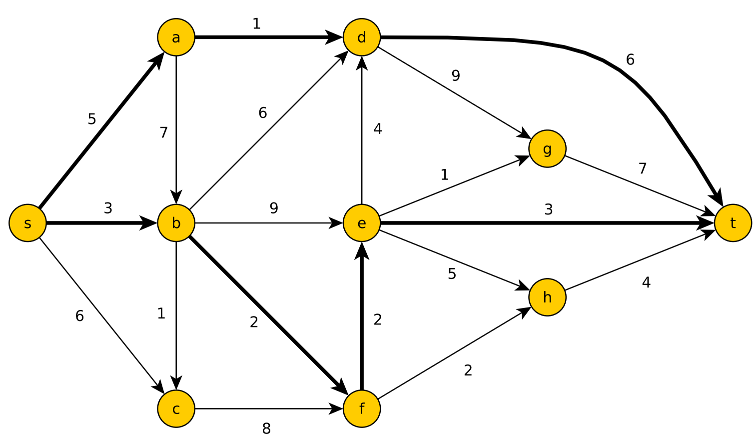
(d) Wege, die kantendisjunkt sind, können neben $s$ und $t$ weitere Knoten gemeinsam haben. So wären bspw. die Wege $(s, a, b, d, t)$ und $(s, b, e, t)$ kantendisjunkt aber nicht knotendisjunkt, da bei den Knoten $b$ enthalten.

Angenommen, wir suchen nun Wege, die knotendisjunkt sind, die also mit Ausnahme von $s$ und $t$ keine gemeinsamen Knoten haben.

Zeigen Sie: Ein Problem für knotendisjunkte Wege kann in ein äquivalentes Problem für kantendisjunkte Wege überführt werden.

**Lösung:**

(a) LP siehe Homepage. Als optimale Lösung ergibt sich

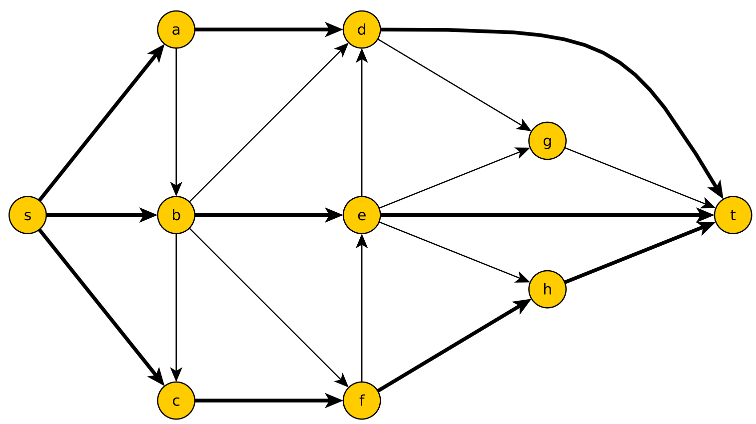



mit einer Länge von 22.

(b) Ja, die Koeffizientenmatrix ist total unimodular. Es ist die gleiche Matrix wie beim kürzesten Wege Problem, da sich gegenüber diesem nur die rechte Seite ändert.

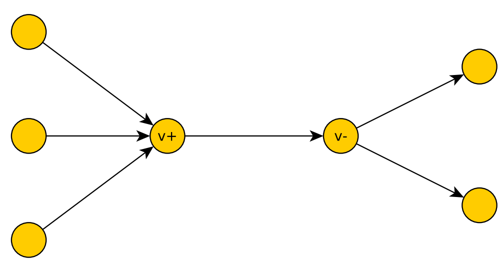
(c) Mit einem Maximalflussproblem. Dazu geben wir jeder Kante die Kapazität 1. Der Wert eines Maximalflusses gibt dann die maximale Anzahl an disjunkten Wegen von $s$ nach $t$ an.

LP siehe Homepage. Es ergibt sich $k = 3$. Ein Beispiel für einen Maximalfluss ist




(d) Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ führen wir folgende Operationen aus:

- Wir ersetzen den Knoten $v$ durch zwei Knoten $v^+$ und $v^-$.
- Jede eingehende Kante $(w, v)$ ersetzen wir durch die Kante $(w, v^+)$.
- Jede ausgehende Kante $(v, w)$ ersetzen wir durch die Kante $(v^-, w)$.
- Zusätzlich führen wir die Kante $(v^+, v^-)$ ein.




Wege, die im Originalgraph nicht knotendisjunkt sind, weil sie bspw. den Knoten $v$ gemeinsam haben, wären im geänderten Graph nicht kantendisjunkt, da sie dort die Kante $(v^+, v^-)$ gemeinsam hätten.

Andererseits ist jeder knotendisjunkte Weg im Originalgraph auch im geänderten Graph knotendisjunkt und damit auch kantendisjunkt.