Kombinatorische Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1 (Matroid)

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengensysteme Matroide sind.

(a) Das Teilmengensystem aus Beispiel 6.20.

(b) Das Teilmengensystem aus Beispiel 6.8 (2). Zeigen Sie hier die Gültigkeit des Austauschaxioms (im Gegensatz zum Beweis von Folgerung 6.17, wo bereits die Matroideigenschaft dieses Teilmengensystems bewiesen wurde).

Lösung:

(a) Wir zeigen dies, indem wir die Gültigkeit des Austauschaxioms nachweisen. Hierzu definieren wir einige Größen. Für eine Teilmenge $P \subseteq J$ von pünktlich planbaren Jobs und $1 \leq i \leq n$ sei

$$r_P(i) := i - |\{j \in P | d(j) \leq i\}|.$$

Es gilt $r_P(i) \geq 0$, denn sonst wären die Jobs aus P nicht alle pünktlich planbar.

Weiterhin sei

$$s_P(i) = \min_{i \leq k \leq n} r_P(k).$$

Die Größe $s_P(i)$ gibt an, wie viele Tage Puffer wir zum Zeitpunkt i bei der Jobmenge P haben. Ein Puffer von 0 würde bedeuten, dass wir bis zum Tag i täglich einen Job einplanen müssen. Ein größerer Puffer wurde bedeuten, dass wir so viele freie Tage planen könnten.

Es sei nun $A \in \mathcal{T}$ und $B \in \mathcal{T}$ mit $|A| = |B| + 1$. A und B sind also Teilmengen von Jobs, wobei alle Jobs pünktlich abgearbeitet werden können.

Es sei nun i' das kleinste i, für das

$$s_A(i) < s_B(i)$$

gilt. Dieses i' muss existieren, denn für alle Jobmengen P gilt $s_P(n) = r_P(n)$ und weiterhin gilt

$$r_A(n) = n - |A| < n - |B| = r_B(n).$$

Also spätestens zum Zeitpunkt $i = n$ gilt $s_A(i) < s_B(i)$.

Da i' das kleinste solche i ist, muss es also in A einen Job j mit Endtermin i' geben, der in B nicht enhalten ist (durch den der geringere Puffer entsteht). Also gilt $j \in A \setminus B$.

Da B ab i' einen Puffer von mindestens 1 hat, es gilt ja $s_B(i') > s_A(i') \geq 0$, kann dieser Job in B aufgenommen werden und zum Zeitpunkt i' geplant werden. Damit gilt $B \cup \{j\} \in \mathcal{T}$.

(b) Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Wir betrachten das Teilmengensystem $(E, \mathcal{T})$ mit

$$\mathcal{T} = \{F \subseteq E | (V, F) \text{ ist ein kreisfreier Untergraph von } G\}.$$

Wir müssen die Gültigkeit des Austauschaxioms (Definition 6.14) nachweisen. Dies machen wir mit einem Widerspruchsbeweis.

Annahme: Das Austauschaxiom gilt nicht. Im Kontext der betrachteten Situation heißt dies: Es existieren Kantenmengen $A \subseteq E$ und $B \subseteq E$ mit $|A| = |B| + 1$, so dass $G_A := (V, A)$ und $G_B := (V, B)$ kreisfrei sind, aber für alle Kanten $e \in A \setminus B$ hat der Untergraph $(V, B \cup e)$ einen Kreis.

Vorbemerkungen: Aus der Graphentheorie wissen wir,

- dass ein kreisfreier Graph höchstens $|V| - 1$ viele Kanten haben kann und das ein kreisfreier Graph mit $0 \leq k \leq |V| - 1$ Kanten genau $|V| - k$ Zusammenhangskomponenten hat. Anschauliche Begründung: Wir beginnen mit einem Graph ohne Kanten, dieser hat $|V|$ Zusammenhangskomponenten. Jede Kante, die wir hinzunehmen, verbindet zwei Zusammenhangskomponenten, da der Graph kreisfrei ist. So haben wir nach der Hinzunahme von k Kanten $|V| - k$ Zusammenhangskomponenten.
- dass ein Baum mit $|V|$ Knoten genau $|V| - 1$ Kanten hat.
- dass ein Baum maximal kreisfrei ist, d. h. jede weitere Kante, die wir in einem Baum aufnehmen, führt zu einem Kreis.

Wegen $|B| < |A| \leq |V| - 1$ besteht der Graph G_B aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten (siehe oben (a)). Wenn jede Kante $e \in A \setminus B$ zu einem Kreis führt, dann bedeutet dies, dass jede Kante von A in einer Zusammenhangskomponente von G_B liegt, denn ein Kreis kann nur entstehen, wenn durch die Kante e zwei Knoten verbunden werden, die in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen. Damit hat G_A die gleichen Zusammenhangskomponenten wie G_B.

Da G_A aber eine Kante mehr hat, muss es eine Zusammenhangskomponente geben, die in G_A eine Kante mehr hat, als in G_B. Da jede Zusammenhangskomponente in G_B aber einen Baum bildet, kann diese Zusammenhangskomponente in G_A mit einer Kante mehr nicht mehr kreisfrei sein (siehe oben (b),(c)). Dies ist ein Widerspruch dazu, dass G_A kreisfrei ist.

Also gilt das Austauschaxiom.

Aufgabe 2 (Schranke für Matching-VC ist scharf)

(a) Zeigen Sie, dass die Approximationsgüte von 2 des Algorithmus $A =$ Matching-VC für das Problem $\Pi =$ Vertex Cover für alle Eingabegrößen scharf ist, d. h.

$$\forall \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists I \in \mathcal{I}_\Pi \text{ mit } |I| \geq n \wedge w_A(I) \geq (2 - \epsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I).$$

Hinweise:

- Als Eingabegröße $|I|$ dürfen Sie die Anzahl $|V|$ der Knoten eines Graphen $G = (V, E)$ betrachten.
- Versuchen Sie Instanzen $I \in \mathcal{I}_\Pi$ zu finden, für die sogar $w_A(I) = 2 \cdot \mathrm{OPT}(I)$ gilt.

(b) Statt Vertex Cover betrachten wir nun Weighted Vertex Cover. Jeder Knoten $v \in V$ hat ein Gewicht $W(v)$ und wir suchen eine Knotenüberdeckung mit minimalem Gewicht.

Als Approximationsalgorithmus passen wir Matching-VC wie folgt an:

- Wir ordnen einer Kante $e = \{v, w\}$ das Gewicht $W(e) = W(v) + W(w)$ zu.

– Wir betrachten die Kanten $e \in E$ aufsteigend sortiert nach ihrem Gewicht.

Kann man für diesen Algorithmus eine Approximationsgüte nachweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

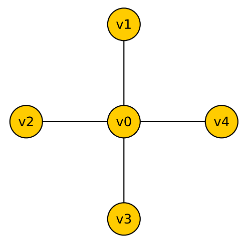
(a) Wir betrachten sogenannte Sterne bzw. n-Sterne. Dies sind Graphen (V, E) mit $n+1$ Knoten

$$V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$$

und den n Kanten

$$E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \ldots, \{v_0, v_n\}\}.$$

Hier ein 4-Stern:



Eine optimale Knotenüberdeckung besteht bei einem n-Stern stets aus dem Knoten v_0, enthält also genau einen Knoten.

Der Algorithmus Matching-VC würde aber genau eine beliebige Kante auswählen und die zwei Knoten dieser Kante ausgeben. Damit haben wir eine Approximationsgüte von genau 2 für alle n-Sterne.

(b) Wir können keine Approximationsgüte nachweisen!

Begründung: Wir betrachten wieder n-Sterne wie in (a). Der Knoten v_0 habe das Gewicht 1, alle anderen Knoten haben ein Gewicht k für $k \in \mathbb{N}$.

Damit ist $\{v_0\}$ mit Gewicht 1 eine optmale gewichtete Knotenüberdeckung.

Der angegebene Algorithmus würde aber eine Kante mit Gewicht $k+1$ auswählen. Wegen

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{1} = \infty$$

Kann damit die Approximationsgüte beliebig groß werden.