



Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 7

Abgabe zu **zweit** am 5. Juni 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 12 Punkte

Aufgabe 1 (Knapsack-Ungleichungen)

2+4=6 Punkte

Wir betrachten das kombinatorische Optimierungsproblem

$$\max z = 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 5x_5$$

unter den Nebenbedingungen

$$10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 5x_5 \leq 13$$

$$7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 2x_5 \leq 10$$

und $x_1, \dots, x_5 \in \{0, 1\}$.

- Geben Sie für die erste und zweite Ungleichung jeweils drei verschiedene Knapsack-Ungleichungen an, davon mindestens eine erweiterte Knapsack-Ungleichung.
- Finden Sie geeignete Knapsack-Ungleichungen und erweiterte Knapsack-Ungleichungen, um mithilfe einer LP-Relaxation nachzuweisen, dass $x_3 = x_5 = 1, x_1 = x_2 = x_4 = 0$ eine optimale Lösung ist.

Aufgabe 2 (Odd-Cycle- und Wheel-Ungleichungen)

4+2+3+3=12 Punkte

Gegeben sei eine kombinatorische Auktion (siehe Aufgabe 4 von Aufgabenblatt 5) mit der Gütermenge $\mathcal{G} = \{1, 2, \dots, 9\}$ und folgenden Geboten:

Gebot	B_i	p_i
B_1	$\{1, 5, 9\}$	8
B_2	$\{1, 4, 9\}$	6
B_3	$\{1\}$	2
B_4	$\{2, 3\}$	3
B_5	$\{2, 6\}$	4
B_6	$\{3, 7\}$	2
B_7	$\{3, 7, 9\}$	4
B_8	$\{3, 5, 7\}$	6
B_9	$\{5, 7\}$	5
B_{10}	$\{8\}$	2
B_{11}	$\{9\}$	2

- (a) Formulieren Sie die zugehörige LP-Relaxation basierend auf INDEPENDENT SET und berechnen Sie damit eine obere Schranke für den Auktionserlös.

Hinweis: Mit “basierend auf INDEPENDENT SET” ist gemeint, dass Sie für je zwei Gebote, die in Konflikt zueinander stehen, eine Ungleichung wie bei INDEPENDENT SET formulieren.

- (b) Identifizieren Sie verletzte Odd-Cycle-Ungleichungen und fügen Sie diese der Relaxation hinzu. Wie lautet die neue obere Schranke?
- (c) Identifizieren Sie weitere Odd-Cycle oder Wheel-Ungleichungen, bis Sie eine ganzzahlige Lösung erhalten. Wie lautet die optimale Lösung?

Hinweis: Für (b) und (c) ist es hilfreich, wenn Sie in einem Graphen darstellen, welche Gebote in Konflikt zueinander stehen.