Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 5

Abgabe zu **zweit** am 22. Mai 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 15 Punkte

Aufgabe 1 (Packungsprobleme) — 3+3+3=9 Punkte

(a) Gegeben ist eine Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Das Problem Subset Sum lautet:

- Existiert eine Teilmenge $B \subseteq A$ für die $\sum_{a \in B} a = \sum_{a \in A \setminus B} a$ gilt?

Zeigen Sie: Subset Sum ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(b) Gegeben ist eine Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ sowie Zahlen $B \in \mathbb{N}$ (Behältergröße) und $k \in \mathbb{N}$ (Behälteranzahl). Das Bin Packing Problem (Bpp) lautet:

- Existiert eine Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$, so dass $\sum_{\{1 \le i \le n | f(i)=j\}} a_i \le B$ für alle $j = 1, \dots, k$ gilt?
  Anschaulich: Kann man n Gegenstände der Größe $a_1, \dots, a_n$ so auf k Behälter der Größe B verteilen, dass alle Gegenstände in einen Behälter passen?

Zeigen Sie: Bpp ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(c) Zeigen Sie: Für $w_1 = \cdots = w_n = 1$ ist das Rucksackproblem in $\mathcal{P}$.

Aufgabe 2 (Logische Inferenz mittels 0-1-Programmierung) — 10 Punkte

Fünf Häuser stehen nebeneinander. In ihnen wohnen Menschen von fünf unterschiedlichen Nationalitäten, die fünf unterschiedliche Getränke trinken, fünf unterschiedliche Zigarettenmarken rauchen und fünf unterschiedliche Haustiere haben.

1. Der Engländer lebt im roten Haus.
2. Der Spanier hat einen Hund.
3. Der Ukrainer trinkt gern Tee.
4. Das grüne Haus ist (direkt) links vom weißen Haus.
5. Im grünen Haus wird Kaffee getrunken.
6. Die Person, die Old-Gold raucht, hat eine Schnecke.
7. Der Bewohner des mittleren Hauses trinkt Milch.
8. Der Bewohner des gelben Hauses raucht Kools.

9. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
10. Der Chesterfields-Raucher wohnt neben der Person mit der Fuchs.
11. Der Mann mit dem Pferd lebt neben der Person, die Kools raucht.
12. Der Lucky-Strike-Raucher trinkt Orangensaft.
13. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Japaner raucht Parliaments.
15. Der Chesterfields-Raucher hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Finden Sie heraus, wem das Zebra gehört! Erstellen Sie hierzu ein 0-1-Programm und lösen Sie dieses mit dem GLPK oder Gurobi.

Anmerkung: „Links“ und „Rechts“ sind von einem Betrachter aus zu verstehen, der vor den Häusern steht. Das erste Haus ist aus dieser Blickrichtung das Haus auf der linken Seite.

Hinweise:

- Formulieren Sie die Punkte 1. bis 15. als logische Formeln und überführen Sie diese wie in Beispiel 2.43 in Gleichungen oder Ungleichungen.
- Darüber hinaus benötigen Sie noch weitere Gleichungen zur Modellierung der allgemeinen Bedingungen (pro Haus genau eine Farbe, Haustier, Nationalität, Zigarettenmarke und Getränk).
- Natürlich ist dieses Problem kein Optimierungsproblem, sondern ein Constraint-Satisfaction-Problem (CSP). Nutzen Sie eine Dummy-Zielfunktion, um hieraus ein Optimierungsproblem zu machen.

Aufgabe 3 (Sudoku) 8 Punkte

Gegeben ist das folgende Sudoku:

				5	4			3
			9			8	7	
2	1							9
8	7			6			2	
9	4			1	3			5
6			4					
				4			8	1
			2	8	5	9		
							3	

Lösen Sie dieses Sudoku mit einem ganzzahligen LP.

Aufgabe 4 ($\mathcal{NP}$-Äquivalenz, kombinatorische Auktion) 6 Punkte

Wir betrachten die Situation bei einer *kombinatorischen Auktion.* Gegeben ist eine Gütermenge $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ von n Gütern, die versteigert werden sollen. Bei kombinatorischen Auktionen sind dies typischerweise Güter, die von gleicher Art aber trotzdem verschieden sind, z. B. Zeitslots für Start- und Landungen an einem Flughafen, Zimmerbelegungen in einem Hotel, Transportaufträge oder Strecken im öffentlichen Nahverkehr.

Für die Güter von $\mathcal{G}$ liegen insgesamt m Gebote vor. Jedes Gebot besteht aus einer Menge $B_i \subseteq \mathcal{G}$ mit $B_i \neq \emptyset$ und einem Preis p_i (für $1 \leq i \leq m$). Die Bieter bieten also auf nichtleere Teilmengen von $\mathcal{G}$. Ziel der Bieter ist es, mehrere Güter auf einmal zu ersteigern, um Synergieeffekte nutzen zu können, beispielsweise mehrere Transportaufträge zu nahe beieinanderliegenden Zielen, für die nur eine LKW-Fahrt erforderlich ist.

Welche Gebote sollen den Zuschlag erhalten? Dabei möchten wir natürlich, dass der Gesamterlös maximal ist und jedes Gut g_i höchstens einmal versteigert wird, also höchstens in einem Gebot, das den Zuschlag erhält, enthalten ist. Wir bezeichnen dieses Problem als CAP (Combinatorial Auction Problem).

Zeigen Sie, dass CAP $\mathcal{NP}$-äquivalent ist.

Hinweis: Zum Beweis für $\mathcal{NP}$-schwer: Formulieren Sie ein entsprechendes Entscheidungsproblem und zeigen Sie für dieses, dass es $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Nutzen Sie hierfür INDEPENDENT SET.