Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Sommersemester 2024
Prof. Dr. Peter Becker

Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 4

Abgabe zu **zweit** am 15. Mai 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 15 Punkte

Aufgabe 1 (3-Sat und Vertex Cover) — 2+2+2+2=8 Punkte

Wir betrachten die folgende aussagenlogische Formel Φ in 3KNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3).$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der entsteht, wenn wir das 3-SAT-Problem für Φ polynomiell in VC transformieren.

(b) Berechnen Sie mit dem GLPK eine optimale Knotenüberdeckung für den Graph aus (a).

(c) Beantworten Sie mit dem Ergebnis für (b) die Frage, ob Φ erfüllbar ist.

Falls die Formel erfüllbar ist: Geben Sie eine Belegung an, die Φ erfüllt.

(d) Formulieren Sie ein ganzzahliges LP, mit dem Sie direkt (also ohne den Umweg über VC) entscheiden können, ob Φ erfüllbar ist.

Aufgabe 2 ($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit) — 3+3=6 Punkte

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$.

Das Problem Independent Set lautet:

> Existiert eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| \geq k$, die keine adjazenten Knoten enthält?

Das Problem Clique lautet:

> Existiert eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| \geq k$, die eine Clique (also einen vollständigen Untergraphen) bildet?

Zeigen Sie:

(a) Independent Set ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(b) Clique ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Hinweis: Als wesentlichen Teil für (a) zeigen Sie Vc $\leq_p$ Independent Set. In (b) zeigen Sie dann Independent Set $\leq_p$ Clique.

Aufgabe 3 (Hamiltonsche Kreise und Wege) 3+3+3+3=12 Punkte

(a) Zeigen Sie: TSP ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(b) Zeigen Sie: HP ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(c) Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V| - 1$.
Das Problem LONGEST PATH lautet:

- Enthält G einen einfachen Weg mit einer Länge $\geq k$?

Zeigen Sie: LONGEST PATH ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

(d) Zeigen Sie: LONGEST PATH ist für gerichtete azyklische Graphen (DAGs) in $\mathcal{P}$.