Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Sommersemester 2024
Prof. Dr. Peter Becker

Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 11

Abgabe zu **zweit** am 10. Juli 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 0 Punkte

Aufgabe 1 (Matroid) — 4+4=8 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengensysteme Matroide sind.

(a) Das Teilmengensystem aus Beispiel 6.20.

(b) Das Teilmengensystem aus Beispiel 6.8 (2). Zeigen Sie hier die Gültigkeit des Austauschaxioms (im Gegensatz zum Beweis von Folgerung 6.17, wo bereits die Matroideigenschaft dieses Teilmengensystems bewiesen wurde).

Aufgabe 2 (Schranke für Matching-VC ist scharf) — 3+3=6 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Approximationsgüte von 2 des Algorithmus $A =$ Matching-VC für das Problem $\Pi =$ Vertex Cover für alle Eingabegrößen scharf ist, d. h.

$$\forall \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists I \in \mathcal{I}_\Pi \text{ mit } |I| \geq n \wedge w_A(I) \geq (2-\epsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I).$$

Hinweise:

- Als Eingabegröße $|I|$ dürfen Sie die Anzahl $|V|$ der Knoten eines Graphen $G = (V, E)$ betrachten.
- Versuchen Sie Instanzen $I \in \mathcal{I}_\Pi$ zu finden, für die sogar $w_A(I) = 2 \cdot \mathrm{OPT}(I)$ gilt.

(b) Statt Vertex Cover betrachten wir nun Weighted Vertex Cover. Jeder Knoten $v \in V$ hat ein Gewicht $W(v)$ und wir suchen eine Knotenüberdeckung mit minimalem Gewicht.

Als Approximationsalgorithmus passen wir Matching-VC wie folgt an:

- Wir ordnen einer Kante $e = \{v, w\}$ das Gewicht $W(e) = W(v) + W(w)$ zu.
- Wir betrachten die Kanten $e \in E$ aufsteigend sortiert nach ihrem Gewicht.

Kann man für diesen Algorithmus eine Approximationsgüte nachweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.