



---

## Kombinatorische Optimierung

### Aufgabenblatt 11

Abgabe zu **zweit** am 3. Juli 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 10 Punkte

---

#### Aufgabe 1 (TSP-Variante mit rein ganzzahligen Lösungen)

10 Punkte

Wir wollen die TSP-Instanz **de20** von Aufgabenblatt 9 um die folgenden Nebenbedingungen erweitern bzw. ändern:

- Statt einer TSP-Tour suchen wir diesmal einen kürzesten hamiltonschen Weg.
  - Die Städte  $h$  und 8 müssen direkt hintereinander besucht werden, in einer beliebigen Reihenfolge.
  - Die Städte  $k, f, 9, 2$  müssen in einer beliebigen Reihenfolge hintereinander besucht werden. Zulässig wären bspw.  $\dots-2-9-f-k-\dots$  und  $\dots-f-2-k-9-\dots$ , aber nicht  $\dots-2-9-1-f-k-\dots$ , weil bei dieser Lösung durch die Stadt 1 die Reihenfolge der Städte  $k, f, 9, 2$  unterbrochen wird.
- (a) Passen Sie die gegebene Relaxation so an, dass die geänderten bzw. zusätzlichen Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Setzen Sie diesmal alle Variablen auf **Integer**, so dass sie mit rein ganzzahligen Lösungen arbeiten.
- (b) Ermitteln Sie mit einem LP-Solver iterativ eine optimale Lösung, indem sie jeweils die aktuelle Relaxation lösen und verletzte gültige Ungleichungen hinzufügen.

#### Aufgabe 2 (Schedulingproblem mit rein ganzzahligen Lösungen)

10 Punkte

Gegeben sind 10 Jobs für die Produktion von verschiedenen Gütern, die auf zwei identischen Maschinen ausgeführt werden können. Jeder Job  $j \in \{1, \dots, 10\}$  muss einer der beiden Maschine zugewiesen werden. Allerdings fallen Umbau- bzw. Wartungsarbeiten  $t_{jk}$  an, wenn auf einer Maschine Job  $k$  direkt nach Job  $j$  ausgeführt wird. Die nachfolgende Tabelle gibt die Zeiten  $t_{jk}$  an.

$t_{jk}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	7	2	8	4	6	1	5	9	3
2	2	-	8	2	4	5	9	1	6	6
3	9	5	-	1	8	5	6	7	2	5
4	7	1	3	-	4	6	8	2	5	3
5	8	3	5	6	-	1	4	2	7	2
6	2	5	1	4	6	-	3	8	2	5
7	7	4	1	9	2	6	-	2	4	1
8	8	9	2	4	1	3	3	-	8	2
9	7	2	3	4	1	6	4	8	-	4
10	7	2	8	2	9	1	3	6	5	-

Erstellen Sie einen Produktionsplan, der die Zeit für erforderliche Umbau- bzw. Wartungsarbeiten minimiert.

(a) Modellieren Sie dieses Problem als ILP.

Hinweise:

- Führen Sie einen virtuellen Startjob 0 ein mit  $t_{0,k} = 0$  für  $k = 1, \dots, 10$  und einen virtuellen Endjob 11 mit  $t_{j,11} = 0$  für  $j = 1, \dots, 10$ .
- Nutzen Sie als Variablen

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{Job } k \text{ wird direkt nach Job } j \text{ auf der selben Maschine ausgeführt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Betrachten Sie die Jobs als Knoten und die  $x_{jk}$  als Kanten in einem Graphen. Welchen Eingangs-/Ausgangsgrad haben die Knoten? Wie sieht dies für die Knoten 0 und 11 aus?
  - Sie benötigen eine Klassen von Nebenbedingungen, die ähnlich den SECs beim TSP ist. Konkret: Sie müssen Kreise verbieten.
- (b) Ermitteln Sie mit einem LP-Solver eine ganzzahlige Lösung für Ihr Modell aus (a) ohne die Nebenbedingungen, die Kreise verbieten.
- (c) Identifizieren Sie iterativ verletzte gültige Ungleichungen (Kreise) und nehmen Sie diese hinzu, bis Sie eine zulässige und damit optimale ganzzahlige Lösung haben.