Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Lösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

(a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie für $\mathbf{A}$ eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ an, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

gilt.

(c) Zeigen Sie:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{D}^n\mathbf{Q}^T.$$

(d) Geben Sie $\mathbf{A}^n$ an.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung aus (c).

Lösung:

(a) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Für $\mathbf{A}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36. \end{aligned}$$

Mit Probieren können wir leicht eine Nullstelle und damit den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 3$ erraten:

$$P(3) = -27 + 7 \cdot 9 - 36 = 0$$

Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36) : (\lambda - 3) = -\lambda^2 + 4\lambda + 12$$

Aus $-\lambda^2 + 4\lambda + 12 = 0$ folgt $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$ und somit

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm 4 = 6, -2.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{q}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(\mathbf{3})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $\mathbf{B}$ lautet das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -4 \\ -2 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4(1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2. \end{aligned}$$

Mit Probieren erraten wir den Eigenwert $\lambda_1 = 1$:

$$P(1) = -2 + 1 + 2 - 1 = 0.$$

Mit Polynomdivision ergibt sich

$$(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + \lambda + 2$$

und somit

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2, -1.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{q}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(\mathbf{3})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Matrix $\mathbf{Q}$ besteht spaltenweise aus den normierten Eigenvektoren, die Matrix $\mathbf{D}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.

Es gilt:

$$\|\mathbf{q}^{(1)}\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{q}^{(2)}\| = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{q}^{(3)}\| = \sqrt{2}.$$

Also:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \left(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\right)^n \\ &= \left(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\right)\left(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\right)\cdots\left(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\right) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)\mathbf{D}\cdots\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{D}^n\mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

(d) Es gilt:

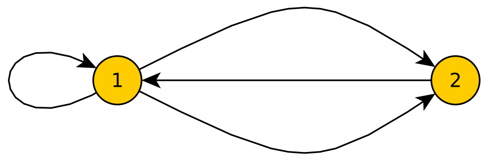
$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{D}^n\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 3^{n-1} + 6^{n-1} + \frac{1}{2}(-2)^n & -3^{n-1} + 2\cdot 6^{n-1} & 3^{n-1} + 6^{n-1} - \frac{1}{2}(-2)^n \\ -3^{n-1} + 2\cdot 6^{n-1} & 3^{n-1} + 4\cdot 6^{n-1} & -3^{n-1} + 2\cdot 6^{n-1} \\ 3^{n-1} + 6^{n-1} - \frac{1}{2}(-2)^n & -3^{n-1} + 2\cdot 6^{n-1} & 3^{n-1} + 6^{n-1} + \frac{1}{2}(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Adjazenmatrix und Wegeberechnungen)

Gegeben Sei der folgende gerichtete Graph G:



(a) Geben Sie die Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$ von G an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und geben Sie zugehörige Eigenvektoren an.

(c) Stellen Sie die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar.

(d) Leiten Sie eine Formel für $\mathbf{A}^n$ her.

(e) Wie viele Kantenzüge der Länge 10 gibt es zwischen den Knoten 1 und 2?

(f) Wir betrachten alle Kantenzüge der Länge 10, die in Knoten 1 beginnen und wählen einen dieser Kantenzüge gleichverteilt aus. Was ist wahrscheinlicher: Dass der ausgewählte Kantenzug in Knoten 1 oder in Knoten 2 endet? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

Lösung:

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte λ, μ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda, \mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2 \text{ bzw. } (-1).$$

Als zugehörige Eigenvektoren erhalten wir beispielsweise

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$\frac{2}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}^1$$

und

$$\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}^2.$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^n &= \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{A}^{n-1}\left(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\right) \\
&= \mathbf{A}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}, \frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}, \frac{2}{3}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\lambda^{n-1}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mu^{n-1}\mathbf{v}, \frac{2}{3}\lambda^{n-1}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mu^{n-1}\mathbf{v}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}2^{n-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \frac{2}{3}2^{n-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1} + (-1)^n & 2^{n+1} + 2(-1)^{n-1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(e) Das Elemente $a_{1,2}^{(10)}$ der Matrix $\mathbf{A}^{10}$ gibt die Anzahl der Kantenzüge der Länge 10 zwischen den Knoten 1 und 2 an. Dies sind

$$
\frac{1}{3}\left(2^{11} + 2(-1)^9\right) = \frac{1}{3}(2048 - 2) = \frac{2046}{3} = 682.
$$

(f) Es gibt insgesamt

$$
a_{1,1}^{(10)} + a_{1,2}^{(10)} = \frac{1}{3}\left(2^{11} + (-1)^{10} + 2^{11} + 2(-1)^9\right) = \frac{1}{3}(2049 + 2046) = 1365
$$

Kantenzüge, die in Knoten 1 beginnen. Davon enden 682 in Knoten 2 (siehe (e)) und dementsprechend $1365 - 682 = 683$ in Knoten 1. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass solch ein Kantenzug in Knoten 1 endet, höher. Die Wahrscheinlichkeiten sind

$$
P(\text{Knoten 1}) = \frac{683}{1365} \approx .500366 \quad \text{und} \quad P(\text{Knoten 2}) = \frac{682}{1365} \approx .499633.
$$