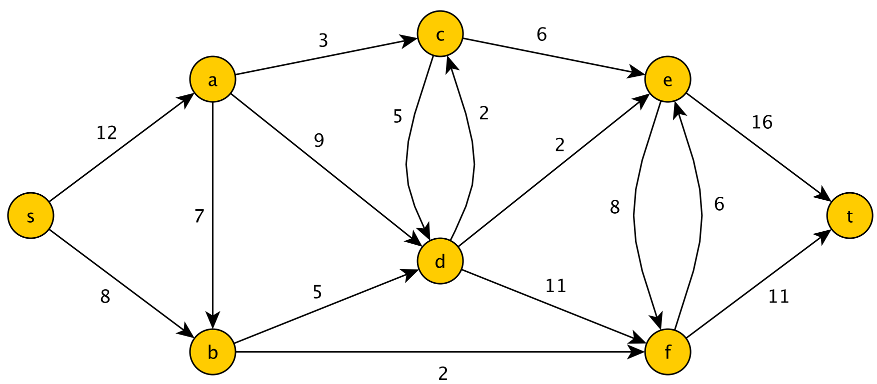
Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Lösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Maximalfluss und minimaler Schnitt)

Wir wollen das folgende Flussnetzwerk analysieren und hierzu den minimalen Schnitt des Netzwerks bestimmen.

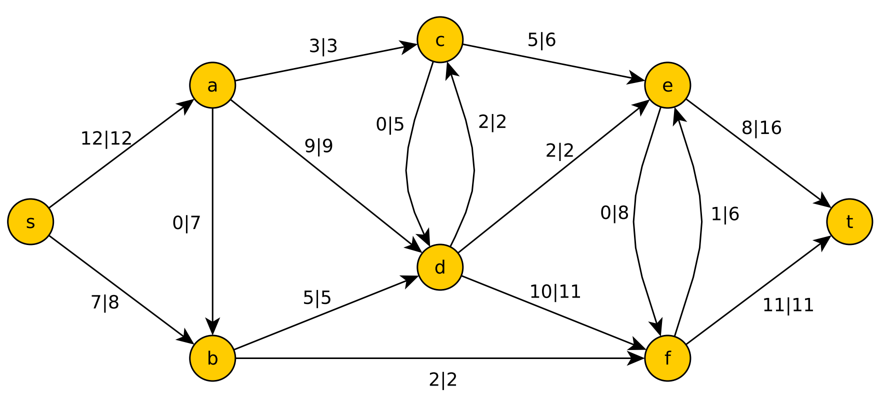


(a) Erstellen Sie zur Lösung des Maximalflussproblems ein LP und lösen Sie dieses. Wie lautet der Wert des maximalen Flusses? Geben Sie auch den Maximalfluss konkret an.

(b) Bestimmen Sie mittels der Lösung aus (a) einen minimalen Schnitt. Geben Sie alle Kanten an, die zum minimalen Schnitt gehören.

Lösung:

(a) LP siehe Homepage. Hier der optimale Fluss:



Der maximale Flusswert beträgt 19.

(b) Die Kantenmenge $\{(s,a),(b,d),(b,f)\}$ bildet einen minimalen Schnitt (mit Kapazität 19).

Aufgabe 2 (Ausgleichsrechnung mit $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm)

(a) Bestimmen Sie für die Daten von Aufgabe 2, Aufgabenblatt 5 die Regressionsgerade $y = ax + b$, die durch das Fehlerfunktional $E_1(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$ bestimmt ist.

(b) wie (a), aber für das Fehlerfunktional $E_\infty(a, b) = \max_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$.

(c) Bestimmen Sie für die Daten von Aufgabe 1, Aufgabenblatt 5 die Ausgleichsfunktion $y = ax^2 + bx + c$, die durch das Fehlerfunktional $E_1(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} |ax_i^2 + bx_i + c - y_i|$ bestimmt ist.

(d) wie (c), aber für das Fehlerfunktional $E_\infty(a, b, c) = \max_{i=1}^{n} |ax_i^2 + bx_i + c - y_i|$.

(e) Erstellen Sie jeweils einen Plot für die Aufgaben (a), (b) und die Aufgaben (c), (d). Zeichnen Sie in die Plots auch die Ausgleichsfunktionen für das E_2-Fehlerfunktional.

Lösung:

(a) LP siehe Homepage, Regressionsgerade ist

$$f(x) = 121.212x - 141.364.$$

(b) LP siehe Homepage, Regressionsgerade ist

$$f(x) = 145.946x - 185.311.$$

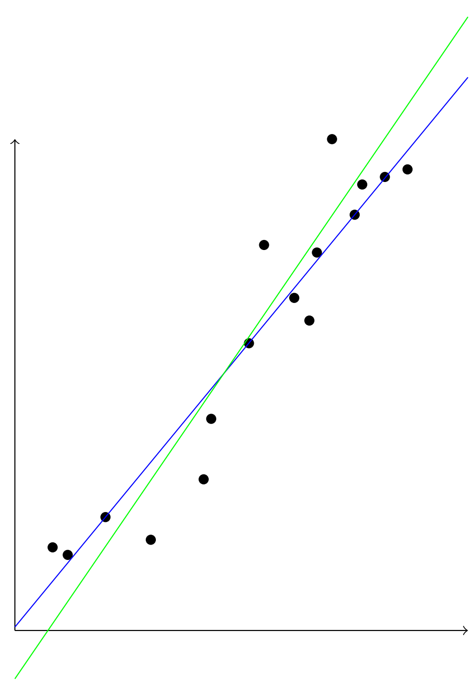
(c) LP siehe Homepage, Regressionspolynom ist

$$f(x) = -0.88x^2 + 3.54x + 5.1.$$

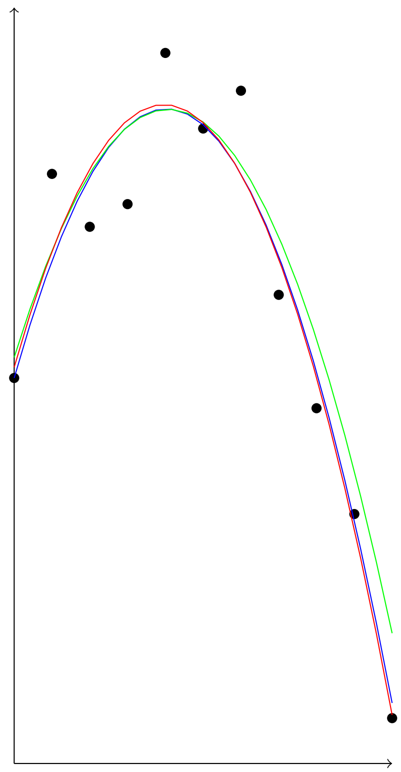
(d) LP siehe Homepage, Regressionspolynom ist

$$f(x) = -0.79x^2 + 3.22x + 5.37286.$$

(e) (a) blau, (b) grün



(c) blau, (d) grün, (E2) rot



Aufgabe 3 (Trennende Hyperebene) 4+4=8 Punkte

(a) Gegeben sind die folgenden Daten:

x_i	y_i	Klasse
0.6	2.5	1
1.0	0.9	1
1.4	−2.9	2
1.5	1.4	1
2.5	2.5	1
2.6	−2.5	2
2.7	−3.9	2
2.9	3.5	1
3.0	1.1	1
3.5	−1.5	2
3.6	−2.4	2
4.1	−3.6	2
4.4	2.3	1

x_i	y_i	Klasse
5.2	−2.4	2
5.5	−1.4	2
5.6	1.6	1
5.8	−3.2	2
6.0	3.6	1
7.2	−1.2	2
7.5	2.4	1
7.6	−1.9	2
8.6	3.4	1
9.6	0.6	2
9.9	−1.3	2
10.6	2.5	1
11.1	1.7	2

Berechnen Sie eine Gerade, die die beiden Klassen trennt, so dass der vertikale Abstand der Klassenpunkte, die der Geraden am nächsten liegen, maximiert wird (vgl. Folie 284).

(b) Wir erweitern die Datenmenge von (a) um die folgenden Daten:

x_i	y_i	Klasse
1.4	−1.4	2
4.0	1.0	2
4.9	−1.0	1
7.2	1.5	2
8.6	0.5	1
9.9	0.7	1

Es ist jetzt nicht mehr möglich, die beiden Klassen linear zu trennen.

Berechnen Sie eine Gerade, so dass die Summe der vertikalen Abstände zur Geraden für die falsch klassifizierten Punkte minimal wird (vgl. Folie 286).

Lösung: LPs siehe Homepage.