# Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

## Lösungen zu Aufgabenblatt 7

### Aufgabe 1 (Eckenalgorithmus)

Gegeben sei das folgende LP:

$$\max 16x_1 + 32x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & \leq & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & \leq & 4500 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

(a) Bestimmen Sie alle Ecken des zulässigen Bereichs $\chi_{LP}$.

(b) Geben Sie eine optimale Lösung für das LP an.

(c) Welche optimale Lösung ergibt sich, wenn die Zielfunktion

$$\max 32x_1 + 16x_2$$

lautet?

**Lösung:**

(a) Zunächst bringen wir das LP in Normalform. Diese lautet:

$$\max 16x_1 + 32x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

Nun bestimmen wir alle zulässigen Basislösungen. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $= 3$, wir haben 5 Variablen, also ergeben sich $\binom{5}{3} = 10$ mögliche Basen.

$\{x_1, x_2, x_3\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & = & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & & & = & 4500 \end{array}$$

Aus den Gleichungen (II) und (III) ergibt sich $x_1 = 250, x_2 = 200$. Eingesetzt in (I) erhalten wir $x_3 = 1000$ und somit die Ecke

$$\mathbf{e}_{1,2,3} := \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{x_1, x_2, x_4\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & & & = & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_4 & = & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & & & = & 4500 \end{array}$$

Aus den Gleichungen (I) und (III) ergibt sich $x_1 = 312.5, x_2 = 175$. Eingesetzt in (II) erhalten wir $x_4 < 0$ und somit keine zulässige Basislösung und damit auch keine Ecke.

$\{x_1, x_2, x_5\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & & & = & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & = & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & + & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

Aus den Gleichungen (I) und (II0 ergibt sich $x_1 = 333\frac{1}{3}, x_2 = 133\frac{1}{3}$. Eingesetzt in (III) erhalten wir $x_3 = 500$ und somit die Ecke

$$\mathbf{e}_{1,2,5} := \begin{pmatrix} \frac{1000}{3} \\ \frac{400}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$\{x_1, x_3, x_4\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & x_3 & & & = & 8000 \\ 4x_1 & & & + & x_4 & = & 2000 \\ 6x_1 & & & & & = & 4500 \end{array}$$

Aus (III) ergibt sich $x_1 = 750$. Eingesetzt in (II) erhalten wir $x_4 < 0$ und somit keine Ecke.

$\{x_1, x_3, x_5\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & x_3 & & & = & 8000 \\ 4x_1 & & & & & = & 2000 \\ 6x_1 & & & + & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

Aus (II) ergibt sich $x_1 = 500$. Eingesetzt in (I) erhalten wir $x_3 < 0$ und somit keine Ecke.

$\{x_1, x_4, x_5\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & & & & & = & 8000 \\ 4x_1 & + & x_4 & & & = & 2000 \\ 6x_1 & & & + & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

Aus (I) ergibt sich $x_1 = 400$. Eingesetzt in (II) erhalten wir $x_4 = 400$ und eingesetzt in (III) $x_5 = 2100$. Ecke:

$$\mathbf{e}_{1,4,5} := \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \\ 400 \\ 2100 \end{pmatrix}$$

$\{x_2, x_3, x_4\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_2 & + & x_3 & & & = & 8000 \\ 5x_2 & & & + & x_4 & = & 2000 \\ 15x_2 & & & & & = & 4500 \end{array}$$

Aus (III) ergibt sich $x_2 = 300$. Eingesetzt in (II) erhalten wir $x_4 = 500$ und eingesetzt in (I) $x_3 = 5000$. Ecke:

$$\mathbf{e}_{2,3,4} := \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 5000 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{x_2, x_3, x_5\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcccccl} 10x_2 & + & x_3 & & & = & 8000 \\ 5x_2 & & & & & = & 2000 \\ 15x_2 & & & + & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

Aus (II) ergibt sich $x_2 = 400$. Eingesetzt in (III) erhalten wir $x_5 < 0$ und somit keine Ecke.

$\{x_2, x_4, x_5\}$: LGS:

$$\begin{array}{rcccccl} 10x_2 & & & & & = & 8000 \\ 5x_2 & + & x_4 & & & = & 2000 \\ 15x_2 & & & + & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

Aus (I) ergibt sich $x_2 = 800$. Eingesetzt in (II) erhalten wir $x_4 < 0$ und somit keine Ecke.

$\{x_3, x_4, x_5\}$: LGS:

$$\begin{array}{ccccl} x_3 & & & = & 8000 \\ & x_4 & & = & 2000 \\ & & x_5 & = & 4500 \end{array}$$

Ergibt die Ecke

$$\mathbf{e}_{3,4,5} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8000 \\ 2000 \\ 4500 \end{pmatrix}.$$

(b) Da es mindestens eine optimale Lösung gibt, die in einer Ecke liegt, brauchen wir nur die Zielfunktionswerte für die Ecken zu bestimmen.

| Ecke | Zielfunktionswert |
|---|---|
| $\mathbf{e}_{1,2,3}$ | $16 \cdot 250 + 32 \cdot 200 = 10400$ |
| $\mathbf{e}_{1,2,5}$ | $(16 \cdot 1000 + 32 \cdot 400)/3 = 9600$ |
| $\mathbf{e}_{1,4,5}$ | $16 \cdot 400 = 6400$ |
| $\mathbf{e}_{2,3,4}$ | $32 \cdot 300 = 9600$ |
| $\mathbf{e}_{3,4,5}$ | $0$ |

Damit ist die Ecke $\mathbf{e}_{1,2,3}$ eine optimale Lösung des LP.

(c) Wir bestimmen für diese Zielfunktion die Zielfunktionswerte in den Ecken.

| Ecke | Zielfunktionswert |
|---|---|
| $\mathbf{e}_{1,2,3}$ | $32 \cdot 250 + 16 \cdot 200 = 11200$ |
| $\mathbf{e}_{1,2,5}$ | $(32 \cdot 1000 + 16 \cdot 400)/3 = 12800$ |
| $\mathbf{e}_{1,4,5}$ | $32 \cdot 400 = 12800$ |
| $\mathbf{e}_{2,3,4}$ | $16 \cdot 300 = 4800$ |
| $\mathbf{e}_{3,4,5}$ | $0$ |

Für diese Zielfunktion sind sowohl $\mathbf{e}_{1,2,5}$ als auch $\mathbf{e}_{1,4,5}$ optimale Lösungen (und damit auch jede Konvexkombination dieser beiden Ecken).