Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Sommersemester 2026
Prof. Dr. Peter Becker

Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4 (Positive Definitheit)

2+2+2=6 Punkte

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit.

(b) Die Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ist genau dann positiv definit, wenn die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind.

(c) Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 3}$$

ist $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ die Koeffizientenmatrix des LGS von Aufgabenblatt 2, Aufgabe 2 (c).

Lösung:

(a) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \geq 0.$$

(b) Für jede Norm gilt:

$$\|\mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Damit folgt für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)}\cdots\mathbf{a}^{(m)}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\quad & x_1\mathbf{a}^{(1)} + x_2\mathbf{a}^{(2)} + \cdots + x_m\mathbf{a}^{(m)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bedeutet dies aber, dass Spaltenvektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)}$ linear abhängig sind.

(c)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist genau die Koeffizientenmatrix des LGS von Aufgabenblatt 2, Aufgabe 2 (c).

Aufgabe 5 (QR-Zerlegung manuell) 4+3=7 Punkte

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine QR-Zerlegung von **A**.

(b) Lösen Sie mit der QR-Zerlegung aus (a) das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Wir führen das Gram-Schmidt-Verfahren durch. Es gilt

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$r_{1,1} = \|\mathbf{a}^{(1)}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

sowie

$$\mathbf{q}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nun $r_{1,2}$ berechnen.

$$r_{1,2} = \left\langle \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 + 2 - 8) = -\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Somit erhalten wir für $\mathbf{q}^{(2)}$ vor der Normierung

$$\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{a}^{(2)} - r_{1,2}\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Normierung ergibt

$$r_{2,2} = \|\mathbf{q}^{(2)}\| = \frac{1}{3}\sqrt{8^2 + 7^2 + 22^2} = \frac{1}{3}\sqrt{597}$$

und somit

$$\mathbf{q}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{597}} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun $r_{1,3}$ und $r_{2,3}$:

$$\begin{aligned}
r_{1,3} &= \left\langle \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{a}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{9}{\sqrt{6}} \\
r_{2,3} &= \left\langle \mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{597}} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{144}{\sqrt{597}}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $\mathbf{q}^{(3)}$ vor der Normierung

$$\mathbf{q}^{(3)} = \mathbf{a}^{(3)} - r_{1,3}\mathbf{q}^{(1)} - r_{2,3}\mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{9}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{144}{597} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{1194} \begin{pmatrix} 5457 \\ -3210 \\ -963 \end{pmatrix} = \frac{107}{398} \begin{pmatrix} 17 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Normierung ergibt

$$r_{3,3} = \|\mathbf{q}^{(3)}\| = \frac{107}{398}\sqrt{17^2 + (-10)^2 + (-3)^2} = \frac{107}{\sqrt{398}}$$

und somit

$$\mathbf{q}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{398}} \begin{pmatrix} 17 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen $\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{q}^{(3)}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(4 + 2 \cdot 16 - 5) \\ \frac{1}{\sqrt{597}}(8 \cdot 4 + 7 \cdot 16 + 22 \cdot 5) \\ \frac{1}{\sqrt{398}}(17 \cdot 4 - 10 \cdot 16 - 3 \cdot 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{\sqrt{6}} \\ \frac{254}{\sqrt{597}} \\ -\frac{107}{\sqrt{398}} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet das lineare Gleichungssystem $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{9}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{597}}{3} & \frac{144}{\sqrt{597}} \\ 0 & 0 & \frac{107}{\sqrt{398}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{\sqrt{6}} \\ \frac{254}{\sqrt{597}} \\ -\frac{107}{\sqrt{398}} \end{pmatrix}$$

Mit Rückwärtssubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_3 &= -1 \\
x_2 &= \frac{3 \cdot (254 + 144)}{597} = 2 \\
x_1 &= \frac{31 - 9 + 8}{6} = 5.
\end{aligned}$$