Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Lösungen zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (Determinante einer Dreiecksmatrix) — 3 Punkte

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere (untere) Dreiecksmatrix. Geben Sie eine möglichst einfache Formel zur Berechnung von $\det(\mathbf{A})$ an und begründen Sie Ihre Formel.

Lösung: Es gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Begründung: Die Leibniz-Formel lautet

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right).$$

Wir betrachten zunächst eine untere Dreiecksmatrix.

- Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation, die ungleich der identischen Abbildung ist.
- Dann existiert $1 \leq i \leq n$ mit $\sigma(i) \neq i$.
- Wir wählen unter den möglichen i das kleinste.
- Dann muss $\sigma(i) > i$ gelten, denn für $1 \leq j < i$ gilt dann $\sigma(j) = j$.
- Bei einer unteren Dreiecksmatrix ist dann $a_{i,\sigma(i)} = 0$ und somit liefert σ keinen Beitrag zur Determinante.
- Also bleibt nur die identische Abbildung id, die einen Beitrag zur Determinante liefert.
- Mit $\operatorname{sign}(id) = 1$ folgt die obige Formel.

Wegen $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$ gilt die Formel auch für obere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 2 (LR-Zerlegung) — 2+3+5+2=12 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

eine LR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \\ 4 & -6 & 10 & 8 \\ 6 & 12 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(b) Es sei **A** die Matrix aus (a). Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 14 \\ -34 \end{pmatrix}$$

mithilfe von Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

(c) Ermitteln Sie eine LR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 10 & 15 \\ -6 & 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

(d) Geben Sie auf Basis der LR-Zerlegung $\det(\mathbf{B})$ an.

Lösung:

(a) Wir multiplizieren einfach die Matrizen **L** und **R** und prüfen, ob das Produkt mit **A** übereinstimmt. Ja, dies ist der Fall.

(b) Siehe Algorithmus 2.16. Wir lösen zunächst mittels Vorwärtssubstitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 14 \\ -34 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} y_1 &= -6 \\ y_2 &= 6 + y_1 = 0 \\ y_3 &= 14 - 2y_1 - 8y_2 = 26 \\ y_4 &= -34 - 3y_1 + 9y_2 + 2y_3 = 36 \end{aligned}$$

Jetzt lösen wir mittels Rückwärtssubstitution

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 26 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_4 &= 36/(-12) = -3 \\ x_3 &= (26 + 10x_4)/(-4) = 1 \\ x_2 &= (0 - x_3 - x_4)/(-1) = -2 \\ x_1 &= (-6 - x_2 - 3x_3 - 5x_4)/2 = 4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 15 \\ -6 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (2)+(1) \\ (3)-2(1) \\ (4)+3(1) \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 25 \\ 0 & 4 & 11 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (3)-2(2) \\ (4)-4(2) \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 29 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)+1(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

Aus den durchgeführten Operationen ergibt sich

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{R}) = 1 \cdot \det(\mathbf{R}) = 2 \cdot 1 \cdot (-7) \cdot 15 = -210.$$