



---

## Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

### Lösungen zu Aufgabenblatt 11

---

#### Aufgabe 1 (Diskreter Wachstumsprozess)

2+2+2+2=8 Punkte

Ein Wachstumsprozess werde beschrieben durch die Gleichung

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}, \quad \text{für } n \geq 3,$$

mit den Anfangswerten

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2.$$

- (a) Geben Sie eine Matrix  $\mathbf{B}$  an, die den Wachstumsprozess beschreibt, d. h. für  $\mathbf{B}$  soll gelten (vgl. Folie 271):

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\mathbf{B}$ .
- (c) Stellen Sie den Anfangsvektor  $(a_2, a_1, a_0)^T = (2, 1, 0)^T$  als Linearkombination von Eigenvektoren dar.
- (d) Leiten Sie eine explizite Formel für  $a_n$  her.

#### Lösung:

- (a)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 & -12 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(-\lambda)^2 - 12 + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2$  ist ein Eigenwert, denn

$$P(2) = -8 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 12 = 0.$$

Polynomdivision ergibt

$$(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + \lambda + 6$$

und somit erhalten wir

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3, -2.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir suchen Skalare  $\alpha, \beta, \gamma$ , so dass

$$\begin{aligned} 4\alpha + 9\beta + 4\gamma &= 2 \\ 2\alpha + 3\beta - 2\gamma &= 1 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dieses LGS hat die eindeutige Lösung

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{2}{5}, \quad \gamma = -\frac{3}{20}$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} &= \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{B}^{n-2} \left( -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} 3^{n-2} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} (-2)^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

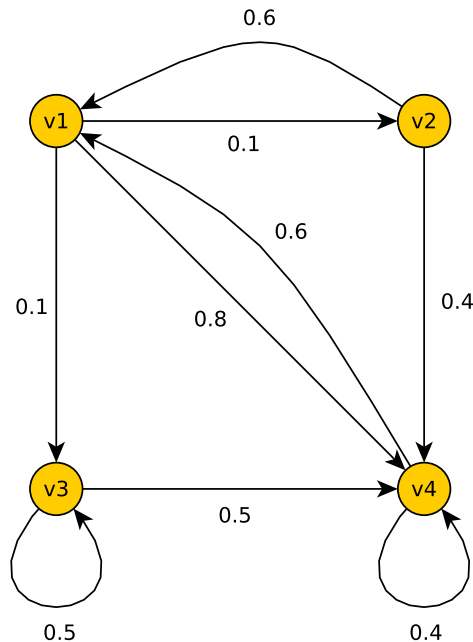
Damit folgt:

$$\begin{aligned} a_n &= -2^{n-2} + \frac{2}{5} 3^n - \frac{3}{5} (-2)^{n-2} \\ &= \frac{2}{5} 3^n - \left( 1 + (-1)^n \frac{3}{5} \right) 2^{n-2} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2 (Cops and Robbers)

5 Punkte

Mafiaboss Jonny Controlletti ist seit einiger Zeit auf der Flucht vor der Polizei. Hierzu wechselt er jede Nacht sein Versteck. Ein eingeschleuster V-Mann hat der Polizei den folgenden Plan zukommen lassen, aus dem ersichtlich wird, wie Controlletti sein Versteck wechselt.



Jeder Knoten des Graphen stellt eines der vier Verstecke von Controlletti dar. Eine gerichtete Kante  $(v_i, v_j)$  beschreibt einen möglichen nächtlichen Umzug von Versteck  $v_i$  zu Versteck  $v_j$ . Die der Kante  $(v_i, v_j)$  zugeordnete Zahl  $p_{i,j}$  gibt dabei die folgende bedingte Wahrscheinlichkeit an:

$$P(\text{Controlletti ist am Tag } t + 1 \text{ in Versteck } j | \text{Controlletti ist am Tag } t \text{ in Versteck } i).$$

Die in Sankt Augustin beheimatete Spezialeinheit GSG 9 ist zum Einsatz bereit, sie kann aber nur ein Versteck stürmen.

- (a) Welches Versteck soll die GSG 9 stürmen?
- (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, Jonny Controlletti dort anzutreffen?

Hinweis: Ein kleines Programm ist hier sicher hilfreich (vgl. Beispiel 4.12).

**Lösung:** Es sei  $\mathbf{P} = (p_{i,j}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  die Matrix der bedingten Wahrscheinlichkeiten und  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T = (p_{j,i})$ , also

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.6 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  ein Vektor für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verstecke zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist

$$\mathbf{A}\mathbf{x}$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt  $t + 1$ .

Wenn wir jetzt zum Zeitpunkt  $t = 0$  von der Verteilung  $\mathbf{x}$  ausgehen, dann ist

$$\mathbf{A}^t \mathbf{x}$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt  $t$ . Für  $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T$ , also Controlletti ist zu Beginn in Versteck 1, ergibt sich:

$t$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	0.0	0.1	0.1	0.8
2	0.54	0.0	0.05	0.41
5	0.32	0.04	0.07	0.57
10	0.35	0.03	0.07	0.55
20	0.35	0.03	0.07	0.55

Es scheint also, dass der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{A}^t \mathbf{x}$$

existiert. Für genügend großes  $t$  können wir daher die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt  $t$  durch diesen Grenzwert abschätzen.

Wir können auch beobachten, dass dieser Grenzwert unabhängig von der Startverteilung  $\mathbf{x}$  ist. So tritt bspw. für die Startverteilung  $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 1)^T$  der gleiche Grenzwert auf.

- (a) Da im Grenzwert die Wahrscheinlichkeit für Versteck 4 am größten ist, sollte die GSG 9 dieses Versteck stürmen.
- (b) Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 55%.