Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Lösungen zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1 (Diskreter Wachstumsprozess)

Ein Wachstumsprozess werde beschrieben durch die Gleichung

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}, \quad \text{für } n \geq 3,$$

mit den Anfangswerten

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2.$$

(a) Geben Sie eine Matrix **B** an, die den Wachstumsprozess beschreibt, d. h. für **B** soll gelten (vgl. Folie 311):

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von **B**.

(c) Stellen Sie den Anfangsvektor $(a_2, a_1, a_0)^T = (2, 1, 0)^T$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar.

(d) Leiten Sie eine explizite Formel für a_n her.

Lösung:

(a)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & -12 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-\lambda)^2 - 12 + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2$ ist ein Eigenwert, denn

$$P(2) = -8 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 12 = 0.$$

Polynomdividion ergibt

$$(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + \lambda + 6$$

und somit erhalten wir

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3, -2.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir suchen Skalare α, β, γ, so dass

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4\alpha & + & 9\beta & + & 4\gamma & = & 2 \\ 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

erfüllt ist. Dieses LGS hat die eindeutige Lösung

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{2}{5}, \quad \gamma = -\frac{3}{20}$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

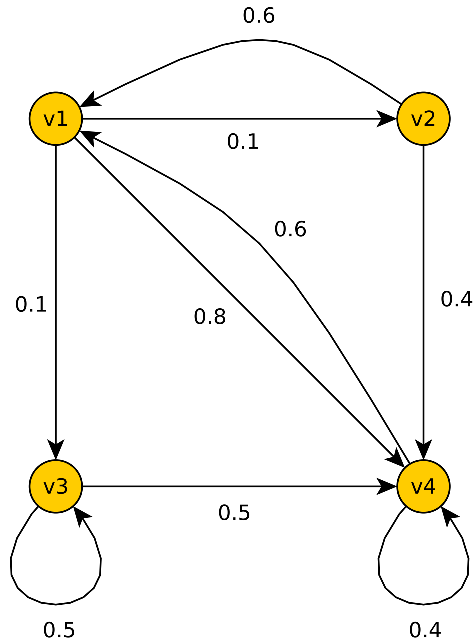
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} &= \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{B}^{n-2} \left(-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \mathbf{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} 3^{n-2} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} (-2)^{n-2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} a_n &= -2^{n-2} + \frac{2}{5} 3^n - \frac{3}{5} (-2)^{n-2} \\ &= \frac{2}{5} 3^n - \left(1 + (-1)^n \frac{3}{5} \right) 2^{n-2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Cops and Robbers)

Mafiaboss Jonny Controlletti ist seit einiger Zeit auf der Flucht vor der Polizei. Hierzu wechselt er jede Nacht sein Versteck. Ein eingeschleuster V-Mann hat der Polizei den folgenden Plan zukommen lassen, aus dem ersichtlich wird, wie Controlletti sein Versteck wechselt.



Jeder Knoten des Graphen stellt eines der vier Verstecke von Controlletti dar. Eine gerichtete Kante (v_i, v_j) beschreibt einen möglichen nächtlichen Umzug von Versteck v_i zu Versteck v_j. Die der Kante (v_i, v_j) zugeordnete Zahl $p_{i,j}$ gibt dabei die folgende bedingte Wahrscheinlichkeit an:

$$P(\text{Controlletti ist am Tag } t+1 \text{ in Versteck } j | \text{Controlletti ist am Tag } t \text{ in Versteck } i).$$

Die in Sankt Augustin beheimatete Spezialeinheit GSG 9 ist zum Einsatz bereit, sie kann aber nur ein Versteck stürmen.

- Welches Versteck soll die GSG 9 stürmen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, Jonny Controlletti dort anzutreffen?

Hinweis: Ein kleines Programm ist hier sicher hilfreich (vgl. Beispiel 5.12).

Lösung: Es sei $\mathbf{P} = (p_{i,j}) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Matrix der bedingten Wahrscheinlichkeiten und $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T = (p_{j,i})$, also

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.6 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ ein Vektor für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verstecke zum Zeitpunkt t. Dann ist

$$\mathbf{Ax}$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt $t+1$. Wenn wir jetzt zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Verteilung $\mathbf{x}$ ausgehen, dann ist

$$\mathbf{A}^t\mathbf{x}$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt t. Für $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T$, also Controlletti ist zu Beginn in Versteck 1, ergibt sich:

t	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0.0	0.1	0.1	0.8
2	0.54	0.0	0.05	0.41
5	0.32	0.04	0.07	0.57
10	0.35	0.03	0.07	0.55
20	0.35	0.03	0.07	0.55

Es scheint also, dass der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{A}^t\mathbf{x}$$

existiert. Für genügend großes t können wir daher die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt t durch diesen Grenzwert abschätzen.

Wir können auch beobachten, dass dieser Grenzwert unabhängig von der Startverteilung $\mathbf{x}$ ist. So tritt bspw. für die Startverteilung $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 1)^T$ der gleiche Grenzwert auf.

Da im Grenzwert die Wahrscheinlichkeit für Versteck 4 am größten ist (≈ 0.55), sollte die GSG 9 dieses Versteck stürmen.