Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Lösung:

(a) Wir betrachten das LGS

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

also

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Umformung ergibt

$$\begin{array}{c} \Longrightarrow \\ (2)+2(1) \\ (3)+3(1) \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \Longrightarrow \\ (3)-5(2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -35 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

(b) Es gilt

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

also lässt sich $\mathbf{0}$ auf nicht-triviale Weise darstellen. Damit sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear abhängig.

Aufgabe 2 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Bestimmen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

(a)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 11 \\ 5x_1 & - & x_2 & = & 8 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & 16 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & & & & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 8x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 12x_4 & = & 2 \end{array}$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$r(\mathbf{A}) = r\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = 2,$$

weil die beiden Spaltenvektoren linear unabhängog sind und $r(\mathbf{A}) \leq 2$ gelten muss. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}|\mathbf{b}) &= \det\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 11 \\ 5 & -1 & 8 \\ 1 & -5 & 16 \end{array}\right) \\ &= 2\cdot(-1)\cdot 16 + 11\cdot 5\cdot(-5) + 1\cdot(-3)\cdot 8 - 11\cdot(-1)\cdot 1 - 8\cdot(-5)\cdot 2 - 16\cdot(-3)\cdot 5 \\ &= -32 - 275 - 24 + 11 + 80 + 240 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ linear abhängig. Daraus folgt $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = 2$, also eindeutig lösbar.

(b) Es gilt $\det(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = -24 \neq 0$. Daraus folgt $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$. Wegen $r(\mathbf{A}) \leq 3$ ist damit das Gleichungssystem nicht lösbar.

(c) $r(\mathbf{A}) = 1$, denn die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ sind alle ein Vielfaches von $\mathbf{a}^1$. Dagegen ist $\mathbf{b}$ kein Vielfaches von $\mathbf{a}^1$, somit gilt $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$. Also nicht lösbar.

Aufgabe 3 (Berechnung der Determinante)

Berechnen Sie für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det(\mathbf{A})$ mit Hilfe der Leibniz-Formel.

Lösung:

Nr.	Permutation	Vorzeichen	Produkt	Ergebnis
1	(1234)	$+$	$1 \cdot (-2) \cdot 9 \cdot 5$	-90
2	(1243)	$-$	$1 \cdot (-2) \cdot 0 \cdot (-2)$	0
3	(1324)	$-$	$1 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot 5$	90
4	(1342)	$+$	$1 \cdot (-3) \cdot 0 \cdot (-3)$	0
5	(1423)	$+$	$1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-2)$	-12
6	(1432)	$-$	$1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot (-3)$	27
7	(2134)	$-$	$(-1) \cdot 1 \cdot 9 \cdot 5$	45
8	(2143)	$+$	$(-1) \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-2)$	0
9	(2314)	$+$	$(-1) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot 5$	-30
10	(2341)	$-$	$(-1) \cdot (-3) \cdot 0 \cdot 4$	0
11	(2413)	$-$	$(-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2)$	4
12	(2431)	$+$	$(-1) \cdot 1 \cdot 9 \cdot 4$	-36
13	(3124)	$+$	$(-1) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5$	-30
14	(3142)	$-$	$(-1) \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-3)$	0
15	(3214)	$-$	$(-1) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 5$	20
16	(3241)	$+$	$(-1) \cdot (-2) \cdot 0 \cdot 4$	0
17	(3412)	$+$	$(-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3)$	-6
18	(3421)	$-$	$(-1) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 4$	24
19	(4123)	$-$	$1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-2)$	12
20	(4132)	$+$	$1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot (-3)$	-27
21	(4213)	$+$	$1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	-8
22	(4231)	$-$	$1 \cdot (-2) \cdot 9 \cdot 4$	72
23	(4312)	$-$	$1 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3)$	18
24	(4321)	$+$	$1 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot 4$	-72
			$\sum$	1

Aufgabe 4 (Cramersche Regel)

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mithilfe der Cramerschen Regel (Satz 1.26):

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Lösung: Es gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 12 + 15 + 6 - 8 + 15 = 12$$

$$\det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 24 + 6 - 12 + 16 + 6 = 48$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 16 - 30 - 6 + 16 + 20 = -12$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 6 + 20 + 8 + 4 + 30 = 60$$

Damit erhalten wir

$$x_1 = \frac{48}{12} = 4, \quad x_2 = \frac{-12}{12} = -1. \quad x_3 = \frac{60}{12} = 5.$$

Aufgabe 5 (Leibniz-Formel und Cramersche Regel in Python)

(a) Implementieren Sie die Leibniz-Formel zur Berechnung der Determinate einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Hinweis: Mit der Funktion `itertools.permutations(range(n))` können Sie alle Permutationen für die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ erzeugen.

- Implementieren Sie die Cramersche Regel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit einer regulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Python.

  Hinweis: Nutzen Sie Ihre Funktion aus Teil (a).

Lösung: siehe Homepage