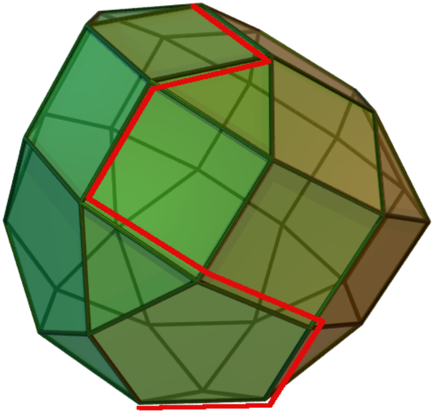
Kapitel 4

Lineare Optimierung mit Anwendungen



Inhalt

4 Lineare Optimierung mit Anwendungen

- Lineares Programm
- Grafische Lösung linearer Programme
- Normalform
- Geometrie linearer Programme
- Basislösungen
- Simplexalgorithmus
- Anwendungen

Lineares Programm

Definition 4.1

Es seien $b_i, c_j, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

Ein lineares Programm (LP) ist die Aufgabe, eine lineare Zielfunktion

$$z = F(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

für $x_j \in \mathbb{R}$ zu maximieren oder zu minimieren unter Beachtung von linearen Nebenbedingungen der Form

$$\begin{array}{rcll} a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & \leq & b_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i & (i = m_1 + 1, \ldots, m_2) \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & \geq & b_i & (i = m_2 + 1, \ldots, m) \end{array}$$

und meist auch von Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0$ für einige oder alle $j = 1, \ldots, n$.

Beispiel 4.2

Ein Eisverkäufer stellt stündlich bis zu 10 kg Eis der Sorten A bzw. B her.

	A	B
Verkaufspreis	80 EUR/kg	65 EUR/kg
Kosten	50 EUR/kg	40 EUR/kg
Energieaufwand	5 kWh/kg	2 kWh/kg
absetzbar	6 kg	9 kg

Es stehen höchstens 30 kWh stündlich zur Verfügung.

Entscheidungsvariablen seien die stündlich herzustellenden Mengen x_1 kg bzw. x_2 kg.

Zu maximieren sei die Differenz aus Preis und Kosten.

Modellierung für Beispiel 4.2

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 80x_1 + 65x_2 - 50x_1 - 40x_2 = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

Zulässige und optimale Lösung

Definition 4.3

Ein Punkt oder Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, der alle Neben- und Vorzeichenbedingungen erfüllt, heißt zulässige Lösung eines LP.

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ heißt optimale Lösung eines LP, wenn es keine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ mit besserem Zielfunktionswert als $F(\mathbf{x}^*)$ gibt.

Mit $\mathcal{X}_{LP}$ bezeichnen wir die Menge der zulässigen Lösungen des linearen Programms LP und mit $\mathcal{X}_{LP}^*$ die Menge der optimalen Lösungen von LP.

Bemerkung: Wenn aus dem Kontext heraus das lineare Programm eindeutig ist, schreiben wir auch $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^*$ statt $\mathcal{X}_{LP}$ bzw. $\mathcal{X}_{LP}^*$.

Grafische Lösung linearer Programme

Wir betrachten zwei Entscheidungsvariablen x_1 und x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

ist die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \text{ und } a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

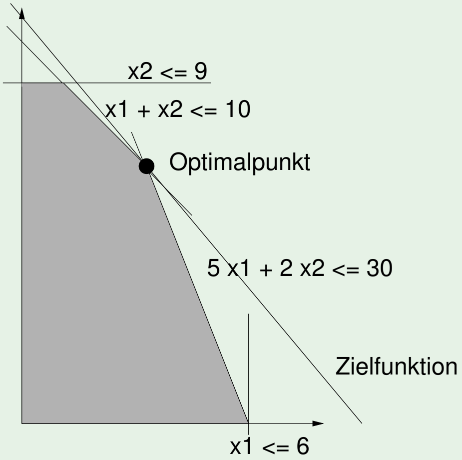
beschreiben jeweils eine Halbebene mit der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ als Rand.

Auch $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ stellen Halbebenen dar.

Der zulässige Bereich ist der Durchschnitt endlich vieler Halbebenen und somit ein sogenanntes konvexes Polyeder mit endlich vielen Eckpunkten.

Grafische Lösung zu Beispiel 4.2

Beispiel 4.4



Die Zielfunktion $z = 30x_1 + 25x_2$ wird ebenfalls durch eine Gerade dargestellt.

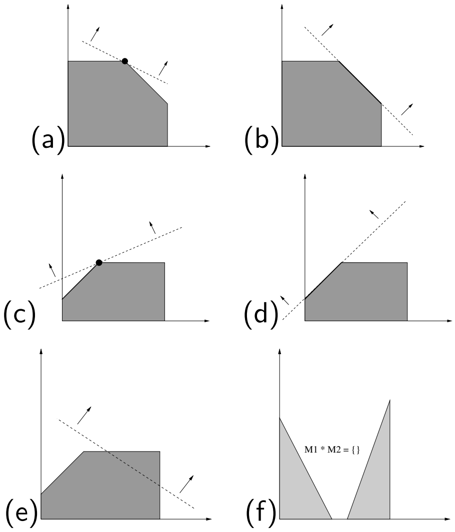
Wachsendes z bedeutet eine Verschiebung nach rechts oben.

Verschiebe nach oben, solange die Gerade durch $\mathcal{X}$ verläuft.

Optimale Lösung im Schnittpunkt der Geraden $x_1 + x_2 = 10$ und $5x_1 + 2x_2 = 30$, also $\mathbf{x}^* = (\frac{10}{3}, \frac{20}{3})$ mit $z^* = \frac{800}{3}$.

Mögliche Situationen bei grafischer Lösung

(a) beschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung
(b) beschränktes $\mathcal{X}$, nicht-eindeutige optimale Lösung
(c) unbeschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung
(d) unbeschränktes $\mathcal{X}$, nicht-eindeutige optimale Lösung
(e) unbeschränktes $\mathcal{X}$, keine optimale Lösung
(f) $\mathcal{X} = \emptyset$



Maximumproblem

Definition 4.5

Ein LP der Form

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und den Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$
heißt Maximumproblem.

Kompakte Schreibweise

Mit $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können wir ein Maximumproblem auch schreiben als:

Maximiere
$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
unter den Nebenbedingungen
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
und den Vorzeichenbedingungen
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Beispiel 4.2 in kompakter Schreibweise

Beispiel 4.6

Maximiere

$$(30, 25) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Umformung in ein Maximumproblem

Satz 4.7

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Form eines Maximumproblems formulieren.

Beweis.

- Ersetze zu minimierende Zielfunktion $z = F(\mathbf{x})$ durch zu maximierende Zielfunktion $-z = -F(\mathbf{x})$
- Transformiere $\geq$-Nebenbedingung durch Multiplikation beider Seiten mit -1 in eine $\leq$-Nebenbedingung.
- Eine Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ kann durch zwei Ungleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ und $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ ersetzt werden.
- Falls für x_j beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ erlaubt sind, so ersetze x_j durch die zwei Variablen $x_j^+ \geq 0$ und $x_j^- \geq 0$ mit $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

$\square$

Beispiel 4.8

Wir überführen das folgende LP in ein Maximumproblem:
Minimiere

$$z = 3x_1 - 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} & \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel 4.8

Zunächst sorgen wir für eine Maximierung und stellen alle Nebenbedingungen als $\leq$ Nebenbedingungen dar:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 7 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & -4 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ -3x_1 - 2x_2 & \leq & -6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

Fortsetzung Beispiel 4.8

Nun wird durch $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ mit $x_2^+, x_2^- \geq 0$ die fehlende Vorzeichenbeschränkung eliminiert. Wir erhalten:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^-$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- & \leq & 7 \\ -x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- & \leq & -4 \\ 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- & \leq & 6 \\ -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \leq & -6 \\ x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 & & \end{array}$$

Normalform

Definition 4.9

Ein LP liegt in Normalform vor, wenn es die Form hat:

Maximiere	$z = F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
unter den Nebenbedingungen	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$
und Vorzeichenbedingungen	$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

In kompakter Darstellung:

Maximiere	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$
unter den Nebenbedingungen	$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
und den Vorzeichenbedingungen	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Umformung in Normalform

Satz 4.10

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Normalform formulieren.

Beweis.

Nach Satz 4.7 lässt sich zu jedem LP ein äquivalentes Maximumproblem formulieren. Es reicht daher zu zeigen, dass jedes Maximumproblem in Normalform überführt werden kann.

Hierzu führen wir für die m Ungleichungen die Schlupfvariablen $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ ein, die in der Zielfunktion mit 0 bewertet werden.

Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ heißen Strukturvariablen.

Fortsetzung Beweis.

Die Normalform ergibt sich dann durch:

Maximiere $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} 0 \cdot x_j$ unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n+m)$$

In Matrixschreibweise lautet die Normalform

$$z = F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Bedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Kanonische Normalform

Definition 4.11

Gelten in der Matrixschreibweise für die Normalform die Eigenschaften

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

so ist das LP in kanonischer Form.

Beispiel 4.12

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Für die Nebenbedingungen führen wir die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5, x_6 ein und erhalten ...

Fortsetzung Beispiel 4.12.

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_6$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 10 \\
5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 30 \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 6 \\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 9
\end{array}$$

und $x_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, 6)$.

Fortsetzung Beispiel 4.12.

In Matrixschreibweise:

Maximiere

$$z = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Existenz von Extremwerten

Satz 4.13 (Weierstraß)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Menge und es sei* $f : M \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion.*

- *Ist* M *kompakt, dann ist die Funktion* f *auf* M *beschränkt und es existieren Minimum und Maximum für* f*.*
- *Ist* M *abgeschlossen und* f *auf* M *nach unten beschränkt, dann existiert das Minimum für* f*.*
- *Ist* M *abgeschlossen und* f *auf* M *nach oben beschränkt, dann existiert das Maximum für* f*.*

Konsequenzen für lineare Programme

- Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nicht leer und beschränkt, dann existiert eine Lösung.
  vgl. Folie 216, Fälle (a) und (b)
- Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nicht leer und die Zielfunktion auf auf dem zulässigen Bereich nach oben beschränkt, dann existiert für Maximierungsprobleme eine Lösung.
  vgl. Folie 216, Fälle (c) und (d)
- Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nicht leer und die Zielfunktion auf auf dem zulässigen Bereich nach unten beschränkt, dann existiert für Minimierungsprobleme eine Lösung.

Konvexität

Definition 4.14

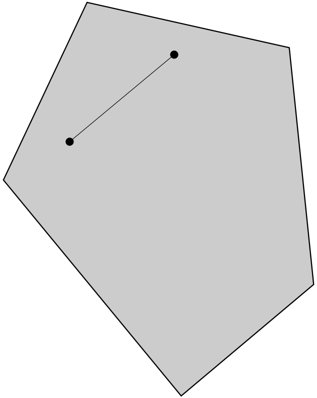
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex gdw. für je zwei Punkte Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M.$$

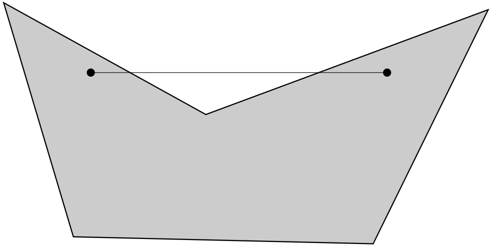
Die konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält, d.h.

$$\text{conv}(M) = \bigcap_{\substack{M \subseteq K \\ K \text{ konvex}}} K$$

Konvexe Menge



konvexe Menge



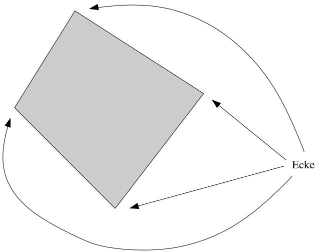
nicht konvexe Menge

Ecke

Definition 4.15

Es $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.

$\mathbf{z}$ heißt Ecke von M, wenn sich $\mathbf{z}$ nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ darstellen lässt.



Frage: Wie viele Ecken hat ein Kreis?

Konvexität und LP-Lösungen

Folgerung 4.16

Es gilt:

- *Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung zulässigen Lösungen ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}^*_{LP}$ der optimalen Lösungen eines LP ist konvex.*

Ecken und LP-Lösungen

Satz 4.17

Gegeben sei ein LP (als Maximumproblem).

- *Die Menge $\mathcal{X}$ der zulässigen Lösungen des LP hat endlich viele Ecken.*
- *Ist $\mathcal{X}$ beschränkt, so nimmt die Zielfunktion ihr Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}$ an.*
- *Ist $\mathcal{X}$ unbeschränkt, aber die Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}$ nach oben beschränkt, so nimmt $F(\mathbf{x})$ das Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}$ an.*
- *Ist $\mathcal{X}$ unbeschränkt und $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}$ nach oben unbeschränkt, so hat das LP keine Lösung.*

vgl. Folie 216

Basis

Definition 4.18

Gegeben sei ein LP in der Normalform mit m als Rang der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ heißt Basislösung gdw. $n - m$ Komponenten x_i gleich Null und die zu den restlichen Variablen gehörenden Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ linear unabhängig sind.
- Eine Basislösung, die zulässig ist ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$), heißt zulässige Basislösung.
- Die m linear unabhängigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ einer (zulässigen) Basislösung heißen Basisvektoren, die zugehörigen Variablen x_j Basisvariablen (BV).
- Alle übrigen Spaltenvektoren heißen Nichtbasisvektoren, die zugehörigen Variablen Nichtbasisvariablen (NBV).
- Die Menge aller Basisvariablen x_j einer Basislösung bezeichnet man als Basis.

Charakterisierung zulässiger Basislösungen

Satz 4.19

$\mathbf{x}$ *ist genau dann eine zulässige Basislösung eines LP, wenn* $\mathbf{x}$ *ist Ecke von* $\mathcal{X}_{LP}$ *ist.*

Bemerkung: Dieser Satz ist der Schlüssel zur algebraischen Lösung von linearen Programmen.

Ecken-Algorithmus

Algorithmus 4.20

Gegeben sei ein LP in Normalform mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Für $N := \binom{n}{m}$ seien $B_1, B_2, \ldots, B_N$ die m-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Für eine Menge $B_k = \{j_1, \ldots, j_m\}$ bezeiche $\mathbf{A}_{B_k} = (\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Matrix, die aus den Spaltenvektoren j_1 bis j_m von $\mathbf{A}$ besteht.

Der Vektor $\mathbf{x}_{B_k}$ ist der entsprechende Variablenvektor dessen Komponenten einen Index aus B_k haben.

Fortsetzung Algorithmus 4.20.

1. $k := 1, z^* := -\infty$
2. Erzeuge $B_k, \mathbf{A}_{B_k}$ und $\mathbf{x}_{B_k}$.
3. Falls $r(\mathbf{A}_{B_k}) < m$ dann weiter mit 6.
4. Löse das LGS $\mathbf{A}_{B_k}\mathbf{x}_{B_k} = \mathbf{b}$. Es sei $\mathbf{x}$ die Basislösung zur Lösung dieses LGS. Falls $\mathbf{x}$ nicht zulässig ist, weiter mit 6.
5. Falls $\mathbf{c}^T\mathbf{x} > z^*$, setze $z^* := \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}^* := \mathbf{x}$.
6. $k := k + 1$. Falls $k \leq N$ gehe zu 2, sonst STOP!

Bemerkungen zum Ecken-Algorithmus

- Wenn ein LP eine Lösung hat, dann liefert der Ecken-Algorithmus eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ mit Zielfunktionswert z^*.
- Die Bestimmung des Rang von $\mathbf{A}_{B_k}$ in Schritt 3 und die Lösung des LGS in Schritt 4 kann mit dem Gaußschen Algorithmus oder der Cramer-Regel erfolgen.
- Der Algorithmus hat keine praktische Bedeutung und ist nur für kleine n und m durchführbar.

Beispiel zum Eckenalgorithmus

Beispiel 4.21

Wir greifen das Beispiel mit dem Eisverkäufer (Beispiel 4.2 bzw. 4.4) wieder auf.
Maximiere $z = F(\mathbf{x}) = 30x_1 + 25x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Man beachte: Die redundante Nebenbedingung $x_1 \leq 6$ wurde weggelassen.

Fortsetzung Beispiel 4.21.

Man erhält $\binom{5}{3} = 10$ verschiedene Spaltenmengen für die Matrix $\mathbf{A}$:

$$B_1 = \{1,2,3\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ ergibt } x_3 < 0$$

$$B_2 = \{1,2,4\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 255$

$$B_3 = \{1,2,5\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 266\frac{2}{3}$

Fortsetzung Beispiel 4.21.

$$B_4 = \{1,3,4\} : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig.}$$

$$B_5 = \{1,3,5\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F(\mathbf{x}) = 180$$

$$B_6 = \{1,4,5\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_4 < 0$$

Fortsetzung Beispiel 4.21.

$$B_7 = \{2,3,4\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 225$

$$B_8 = \{2,3,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_3 < 0$$

$$B_9 = \{2,4,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_5 < 0$$

Fortsetzung Beispiel 4.21.

$$B_{10} = \{3, 4, 5\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F(\mathbf{x}) = 0$$

Für die Ecke $\begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ wird der maximale Zielfunktionswert

$z = F(\mathbf{x}) = 266\frac{2}{3}$ angenommen.

Grundideen

- Der Simplexalgorithmus ist das Standardverfahren zur Lösung von linearen Programmen.
- von George Bernard Dantzig in den 40ern des 20. Jahrhunderts entwickelt
- Vorgehen: versuche ausgehend von einer Startecke mit einer Ausgangsbasis durch Basisaustausch zu einer Ecke mit besserem Zielfunktionswert fortzuschreiten.
- Da es nur endlich viele Ecken gibt, erhälten wir nach endlich vielen Schritten die optimale Lösung.
- Der Basistausch geschieht dabei so sparsam wie möglich: Es wird stets genau eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable ausgetauscht.

Fazit zu Grundideen

Konstruktion einer Folge $(\mathbf{x}^{(r)})$ von Basislösungen mit

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r+1)} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r)}$$

und Abbruch, wenn keine Verbesserung mehr möglich ist.

Beispiel für ein Simplextableau

Beispiel 4.22

Wir bleiben beim Problem des Eisverkäufers (Beispiel 4.21) und ordnen die Daten in einem Simplextableau an:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	1	1	1	0	0	0	10
x_4	5	2	0	1	0	0	30
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	-30	-25	0	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 4.22.

- Die Strukturvariablen x_1, x_2 sind NBV, die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 sind BV.
- Die Werte der BV ergeben sich aus den Nebenbedingungsgleichungen, die durch die Zeilen des Tableaus repräsentiert werden. Hierdurch ist eine Ecke gegeben.
- Für den Zielfunktionswert $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ wird eine neue Variable z eingeführt und die Gleichung $-\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z = 0$ wird wie eine zusätzliche Nebenbedingung aufgefasst. Wir betrachten also eigentlich das Problem:

$$\begin{array}{lrcl} & \max z & & \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & -\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z & = & 0 \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

- Letzte Zeile ist Zielfunktionszeile, aufgefasst als Nebenbedingung. Der Zielfunktionswert z steht ganz rechts.

Beispiel für einen Basiswechsel

Beispiel 4.23

Im Tableau von Beispiel 4.22 verspricht x_1 den größeren Zuwachs, x_1-Spalte ist daher die Pivotspalte.

x_1 kann höchstens den Wert $30/5 = 6$ annehmen, x_4 würde dann 0. x_4-Zeile ist daher die Pivotzeile.

Wir nehmen x_1 in die Basis auf, dafür wird x_4 aus der Basis herausgenommen. Dies ist der Basisaustausch.

Pivotspalte und Pivotzeile schneiden sich im Pivotelement, hier $a_{21} = 5$. Wir teilen die Pivotzeile durch das Pivotelement. Damit entsteht

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 6$$

Aus dieser Gleichung folgt $x_1 = 6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$. Dies setzen wir in alle übrigen Gleichungen ein.

Fortsetzung Beispiel 4.23.

Für die erste Zeile erhalten wir $\left(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4\right) + x_2 + x_3 = 10$. Dies ergibt $\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 4$.

Die dritte Zeile bleibt unverändert, da x_1 dort nicht auftritt.

Die Zielfunktionszeile wird zu $-30(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 25x_2 + z = 0$, also $-13x_2 + 6x_4 + z = 180$.

Jetzt können wir das neue Tableau aufstellen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	0	-13	0	6	0	1	180

Fortsetzung Beispiel 4.23.

Durch Vertauschen der Spalten für x_1 und x_4 können wir das Tableau wieder in die übliche Form bringen:

	x_4	x_2	x_3	x_1	x_5	z	**b**
x_3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	4
x_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	6	-13	0	0	0	1	180

Die zugehörige Ecke ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Fortsetzung Beispiel 4.23.

Der nächste Austauschschritt liefert das Tableau:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_5 & b_i \\
\hline
x_2 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{20}{3} \\
x_1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\
x_5 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\
\hline
z & \frac{5}{3} & \frac{65}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{800}{3}
\end{array}
$$

Das heißt in der Ecke $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ wird das Optimum mit $z = \frac{800}{3}$ angenommen.

Fazit für Beispiel 4.23

- Wir dividieren also die Pivotzeile durch den Pivotwert.
- Zu den übrigen Zeilen addieren wir ein Vielfaches der Pivotzeile, so dass in der Pivotspalte Nullen entstehen (analog zum Gaußalgorithmus).
- optionale Spaltenvertauschung, um wieder die reine kanonische Form zu erlangen
- Aus der Spalte **b** und den Basisvariablen ergibt sich die Ecke.
- Solange in der Zielfunktionszeile Koeffezienten < 0 auftreten, ist eine Verbesserung möglich.
- Der Algorithmus terminiert, wenn in der Zielfunktionszeile alle Koeffizienten ≥ 0 sind.

Kanonische Form

- Dieses Vorgehen funktioniert in der gezeigten Weise nur, wenn zu Beginn ein kanonisches Maximumproblem vorliegt, d.h. ein Problem der Form

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ u.d.N. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

  und zusätzlich $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ gilt.
- Fur dieses kanonische Maximumproblem erhalten wir mit Hilfe von m Schlupfvariablen ein Problem in kanonischer Normalform.
- Die erste Basislösung ist dann durch die Schlupfvariablen bestimmt (siehe Beispiel 4.22).
- Wegen $\mathbf{b} \geq 0$ ist diese Basislösung zulässig und stellt damit eine Ecke (die Startecke) dar.

Starttableau für kanonisches Maximumproblem

BV	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	z	$\mathbf{b}$
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	0	$\cdots$	1	0	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	1	0

Definition 4.24

Für $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ heißt solch ein Tableau primal zulässig.

Bemerkung: Da sich die Spalte z nie ändert, können wir auf diese Spalte im Tableau auch verzichten.

Primaler Simplexalgorithmus

Algorithmus 4.25

Es liege ein kanonisches Maximumproblem ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) vor mit n Variablen und m Nebenbedingungen, also n Struktur- und m Schlupfvariablen in Normalform.

Start: Ecke des Starttableaus ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mit $z = 0$. Schlupfvariablen sind BV, Strukturvariablen sind NBV.

Fortsetzung Algorithmus 4.25.

Starttableau:

	x_1	$\cdots$	x_t	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+s}	$\cdots$	x_{n+m}	b_i
x_{n+1}	$a_{n+1,1}$	$\cdots$	$a_{n+1,t}$	$\cdots$	$a_{n+1,n}$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	$a_{s,1}$	$\cdots$	$a_{s,t}$	$\cdots$	$a_{s,n}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{n+m,1}$	$\cdots$	$a_{n+m,t}$	$\cdots$	$a_{n+m,n}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_t$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0

Von hier ab stehen Indices nicht für eine Spalten- oder Zeilennummer, sondern für den Variablenindex in der entsprechenden Spalte- bzw. Zeile des Simplextableaus.

Fortsetzung Algorithmus 4.25.

Wahl der Pivotspalte: Ist die Zielfunktionszeile von der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccccc|ccc|c} \hline z & d_1 & \cdots & d_t & \cdots & d_n & 0 & \cdots & 0 & d \end{array}$$

mit $d_j \geq 0, (j = 1, \ldots, n)$, so liegt eine Optimallösung vor.
Andernfalls machen wir eine Spalte t mit negativem d_t zur Pivotspalte und die NBV x_t zur BV.

Wahl der Pivotzeile: Sind in der Pivotspalte alle $a_{i,t} \leq 0$, so wächst z unbeschränkt, da x_t unbeschränkt wachsen kann. Es gibt dann keine Optimallösung.

Andernfalls bestimmen wir eine Zeile s durch

$$\frac{b_s}{a_{s,t}} = \min_{i=1}^{m} \frac{b_i}{a_{i,t}} \text{ für } a_{i,t} > 0$$

Die NBV x_t wird BV und bekommt den Wert $\frac{b_s}{a_{s,t}}$.
Die bisherige BV x_s wird NBV und nimmt den Wert 0 an.

Fortsetzung Algorithmus 4.25.

Austauschschritt: Das neue Tableau lautet: Linke Hälfte:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_t & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & a_{1,1} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_t & \frac{a_{s,1}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{s,n}}{a_{s,t}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_m & a_{m,1} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{m,n} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,n} & \\
\hline
z & d_1 - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & d_n - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,n} &
\end{array}
$$

Fortsetzung Algorithmus 4.25.

Rechte Hälfte:

$$
\cdots\;\begin{array}{|ccccc|c}
x_{n+1} & \cdots & x_s & \cdots & x_{n+m} & b_i \\
\hline
1 & \cdots & -\frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & b_1 - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{1,t} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \frac{1}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & \frac{b_s}{a_{s,t}} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & b_m - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{m,t} \\
\hline
0 & \cdots & -\frac{d_t}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & d - \frac{b_s}{a_{s,t}} d_t
\end{array}
$$

Terminierung: Wenn alle Koeffizienten der Zielfunktionszeile nichtnegative Werte haben, beschreibt das Tableau eine optimale Ecke. Rechts unten steht dann z^*.

Andernfalls vertauschen wir die Spalten, so dass das Tableau wieder kanonische Form annimmt. Wir beginnen nun wieder von vorne.

Eigenschaften des primalen Simplexalgorithmus

Satz 4.26

Das r-te Tableau beim Simplexalgorithmus sei primal zulässig. Wählen wir die Pivotspalte und die Pivotzeile gemäß Algorithmus 4.25, so ist das $(r+1)$-te Tableau wieder primal zulässig, und es gilt $z^{(r+1)} \geq z^{(r)}$.

Beispiel zum Simplexalgorithmus

Beispiel 4.27

In einem Betrieb sind drei Maschinen vorhanden, die für die Herstellung zweier Produkte benötigt werden. Bei der Produktion müssen die Produkte auf mehreren Maschinen bearbeitet werden, wobei die folgenden Bearbeitungszeiten anfallen:

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Produkt A	40	24	0
Produkt B	24	48	60

Die tägliche Maschinenlaufzeit beträgt 480 Minuten. Der Ertrag pro Einheit beträgt 10 € für Produkt A und 40 € für Produkt B.

Welche Anzahl der Produkte ist täglich zu fertigen, so dass der Ertrag maximal wird?

Fortsetzung Beispiel 4.27.

Mathematische Modellierung:

x_1 produzierte Menge von Produkt A

x_2 produzierte Menge von Produkt B

LP:

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, x_2) = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 40x_1 + 24x_2 &\leq 480 \\ 24x_1 + 48x_2 &\leq 480 \\ 60x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel 4.27.

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	40	24	1	0	0	0	480
x_4	24	48	0	1	0	0	480
x_5	0	60	0	0	1	0	480
z	-10	-40	0	0	0	1	0

2. Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	40	0	1	0	$-2/5$	0	288
x_4	24	0	0	1	$-4/5$	0	96
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	-10	0	0	0	$2/3$	1	320

Fortsetzung Beispiel 4.27.

3.Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360

Also ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 128 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine optimale Lösung.

Opportunitätskosten und Schattenpreise

Das Endtableau von Beispiel 4.27 entspricht dem LGS:

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
 & & x_3 & -\frac{5}{3}x_4 & +\frac{14}{15}x_5 & & = & 128 \\
x_1 & & & +\frac{1}{24}x_4 & -\frac{1}{30}x_5 & & = & 4 \\
 & x_2 & & & +\frac{1}{60}x_5 & & = & 8 \\
 & & & \frac{5}{12}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & +z & = & 360
\end{array}$$

Aufgelöst nach den Basisvariablen entsteht

$$\begin{array}{rcrrr}
x_3 & = & 128 & +\frac{5}{3}x_4 & -\frac{14}{15}x_5 \\
x_1 & = & 4 & -\frac{1}{24}x_4 & +\frac{1}{30}x_5 \\
x_2 & = & 8 & & -\frac{1}{60}x_5 \\
z & = & 360 & -\frac{5}{12}x_4 & -\frac{1}{3}x_5
\end{array}$$

- Maschine 2 ($x_4 = 0$) und Maschine 3 ($x_5 = 0$) sind voll ausgelastet,
- dagegen steht Maschine 1 pro Tag $x_3 = 128$ Minuten still.
- Der Gewinn würde sich um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € pro Maschinenminute bei Maschine 2 bzw. 3 verringern,
- bzw. um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € erhöhen, wenn eine Maschinenminute mehr zur Verfügung stehen würde.
- Diese Werte nennen wir Opportunitätskosten bzw. Schattenpreise.
- Sie entsprechen dem entgangenen Gewinn durch die nicht mehr verfügbare Kapazität
- bzw. den Preisen, die der Hersteller bereit wäre, für eine Maschinenminute von Maschine 2 bzw. 3 zu zahlen.

Lineare Ausgleichsprobleme auf Basis der Summennorm

Wir betrachten nun das Fehlerfunktional

$$E(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i) \right|$$

für lineare Ausgleichsprobleme.

Durch den Betrag haben wir keine Differenzierbarkeit mehr. Stattdessen modellieren wir das Ausgleichsproblem als LP.

- Wir führen einen Residuumsvektor $\mathbf{r}$ ein, um das Fehlergleichungssystem lösen zu können.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{r} = \mathbf{y}$$

- Das Fehlerfunktional entspricht damit: $E(f) = \sum_{i=1}^{n} |r_i| = \|\mathbf{r}\|_1$.
- Problem: **r** ist nicht vorzeichenbeschränkt.
- Daher setzen wir $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ mit $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$.
- Damit erhalten wir:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{y}$$

- Da von den beiden Variablen u_i und v_i stets eine als 0 gewählt werden kann, gilt:

$$\min \|\mathbf{r}\|_1 = \min \left(\|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1\right) = \min \left(\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i\right)$$

- Damit haben wir ein LP.

$\| \ \|_1$-Ausgleichsproblem als LP

Wir lösen das folgende LP:

$$\min \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{y}$$

und den Vorzeichenbedingungen:

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

Beachten Sie: Die Variablen λ_i des Variablenvektors $\boldsymbol{\lambda}$ sind nicht vorzeichenbeschränkt.

Beispiel 4.28

Für die Daten von Beispiel 3.1 erhalten wir das LP

$$\min u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & & + & u_0 & - & v_0 & = & 4 \\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & u_1 & - & v_1 & = & 6 \\
\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & u_2 & - & v_2 & = & 6.8 \\
\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & u_3 & - & v_3 & = & 9.5 \\
\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & u_4 & - & v_4 & = & 10.5 \\
\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & u_5 & - & v_5 & = & 11.5
\end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$u_i, v_i \geq 0 \text{ für } i = 0, \ldots, 5, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

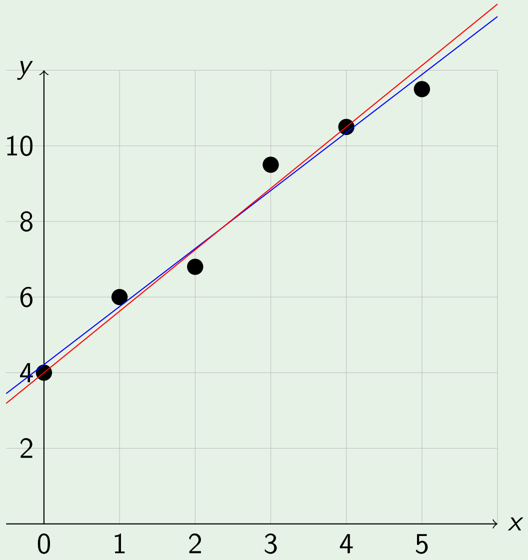
Fortsetzung Beispiel.

Optimale Lösung (Strukturvariablen):

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1.625$$

Also lautet die Ausgleichsgerade:

$$f(x) = 1.625x + 4$$



$\| \|_\infty$-Ausgleichsproblem als LP

- Wir führen die Variable
$$z := \max\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$$
ein.
- Damit lautet die Zielfunktion: $\min z$
- Als zusätzliche Nebenbedingungen erhalten wir:
$$\begin{aligned} z - u_i &\geq 0 \\ z - v_i &\geq 0 \end{aligned}$$
für $i = 1, \dots, n$.

Beispiel 4.29

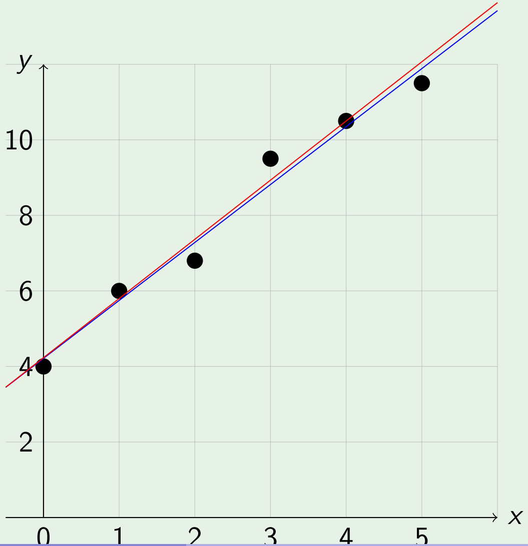
LP für die Daten von Beispiel 3.1: siehe Homepage

Optimale Lösung (Strukturvariablen):

$$\lambda_1 = 4.2333, \lambda_2 = 1.5667$$

Also lautet die Ausgleichsgerade:

$$f(x) = 1.5667x + 4.2333$$



Robustheit

Gegeben seien n (fehlerbehaftete) Messwerte $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

Wir wollen

- eine Schätzung für den realen Wert x mithilfe verschiedener Fehlerfunktionale durchführen
- und die Robustheit dieser Schätzung untersuchen.

Ein Schätz- oder Testverfahren heißt robust, wenn es nicht sensibel auf Ausreißer reagiert.

Ein Ausreißer ist ein Messwert, der nicht den Erwartungen entspricht. Diese wird meistens als Streuungsbereich um den Erwartungswert herum definiert.

Fehlerfunktionale

Fehlerfunktionale hier für die Normen $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_\infty$:

$$
\begin{aligned}
E_2(x) &= \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \\
E_1(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| \\
E_\infty(x) &= \max_{i=1}^{n} |x - x_i|
\end{aligned}
$$

Schätzungen

- für E_2:

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

also das arithmetische Mittel aller Messwerte.

- für E_1:

$$x = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

also der Median der Messwerte.

- für E_∞:

$$x = \frac{1}{2}\left(\max\{x_1, \ldots, x_n\} + \min\{x_1, \ldots, x_n\}\right)$$

also das arithmetische Mittel von Maximum und Minimum der Messwerte.

Robustheit der Schätzungen

- Wie ändert sich der Schätzwert für x bezüglich $E_2(x)$, $E_1(x)$ und $E_\infty(x)$, wenn
  - $x_n \to \infty$ strebt und
  - $x_1, \ldots, x_{n-1}$ unverändert bleiben?
- Wie stark ist dabei der Einfluss von x_n?

für E_1: kein Einfluss, x bleibt unverändert.

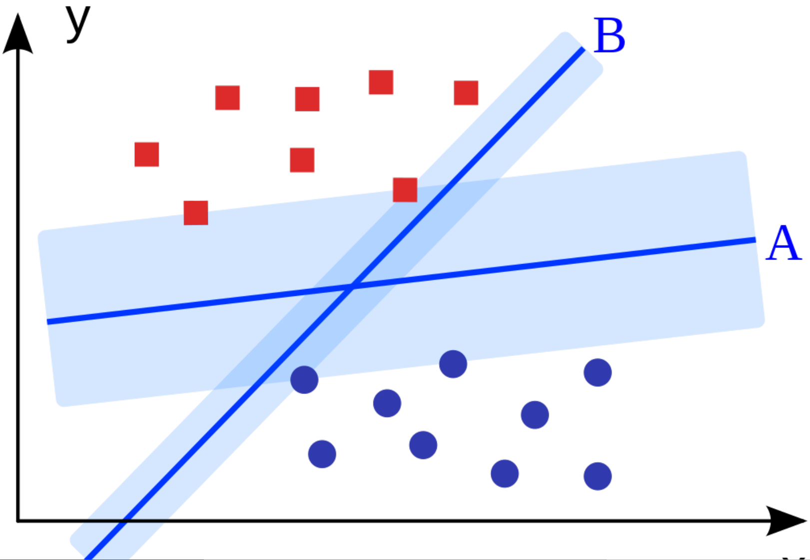
für E_∞: sehr starker Einfluss, x wächst linear mit x_n, Einfluss ist unabhängig von der Anzahl der Messwerte.

für E_2: gedämpfter Einfluss, x wächst prinzipiell linear in x_n, aber mit gedämpftem Faktor $\frac{1}{n}$, also abhängig von der Anzahl der Messwerte.

Support Vector Machine

- Wir haben zwei Klassen und
- eine Menge von Objekten, für die bekannt ist, zu welcher Klasse sie gehören.
- Jedes Objekt wird durch einen Vektor in einem Vektorraum repräsentiert.
- Aufgabe: Man finde eine Hyperebene, die die Objekte in zwei Klassen teilt.
- Dabei soll der Abstand der Objekte, die der Hyperebene am nächsten liegen, maximiert werden.
- Dies soll dafür sorgen, dass auch Objekte, die nicht genau den Trainingsobjekten entsprechen, möglichst zuverlässig klassifiziert werden.

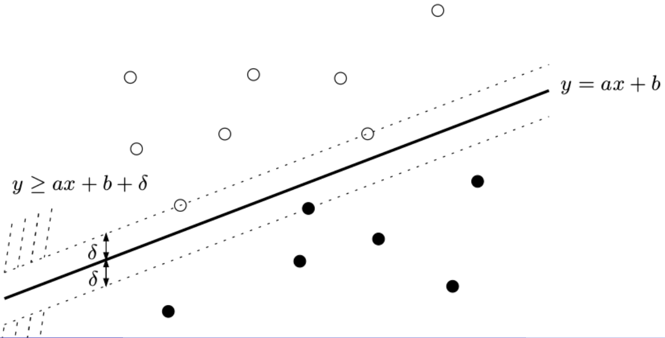
Gute und schlechte Hyperebene



Optimale Hyperebene formaler

Gesucht ist eine Gerade $y = ax + b$, so dass

- alle Punkte der Klasse A oberhalb,
- alle Punkte der Klasse B unterhalb liegen und
- und der vertikale Abstand δ der Punkte, welche der Geraden am nächsten sind, maximiert wird.



Zugehöriges LP

$$\max \delta$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcll} x_i a + b + \delta & \leq & y_i & \text{für die Punkte aus } A \\ x_i a + b - \delta & \geq & y_i & \text{für die Punkte aus } B \end{array}$$

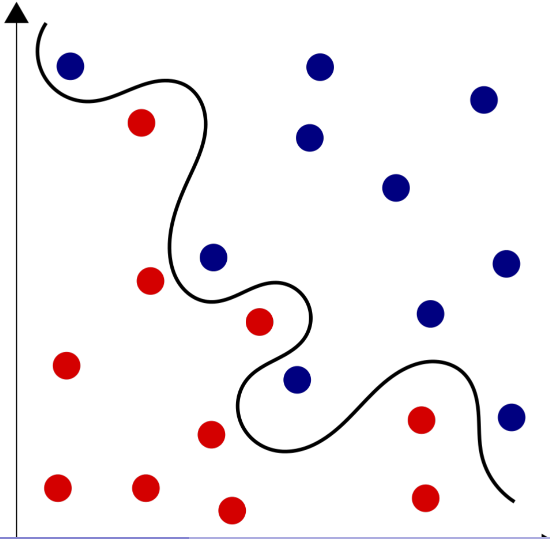
und Vorzeichenbedingungen

$$\delta \geq 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

Nicht linear trennbar

Wie als LP formulieren?

- vgl. Ausgleichproblem bei Summennorm
- Variablen u_i und v_i für positiven bzw. negativen Abstand von Gerade
- Für Punkte der Klasse über der Geraden: nur u_i geht in Zielfunktion ein.
- Für Punkte der Klasse unterhalb der Geraden: nur v_i.
- Übungsaufgabe!



Zusammenfassung

- LP und Normalform
- Konvexität, Ecken, optimale Lösungen treten in Ecken auf
- Ecke $\Leftrightarrow$ zulässige Basislösung, Eckenalgorithmus
- Lösung von LPs mit dem Simplexalgorithmus
- Anwendungen: Lineare Ausgleichsrechnung für Summen- und Maximumsnorm, Optimale trennende Hyperebenen für die Klassifikation