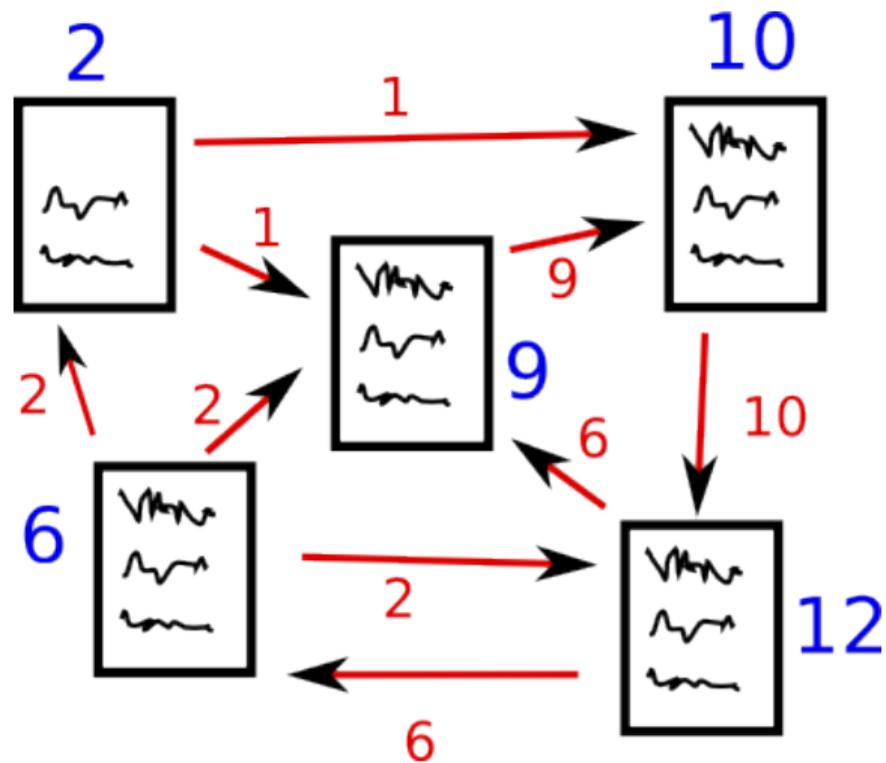


Kapitel 5

Eigenwerte und Netzwerkanalyse



Inhalt

5 Eigenwerte und Netzwerkanalyse

- Eigenwerte
- Numerische Berechnung von Eigenwerten
- Page Rank

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.1

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heißt **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

Die **Eigenwerte der Matrix** \mathbf{A} sind alle Werte λ , für die ein Eigenvektor existiert.

Die Menge

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A}\}$$

aller Eigenwerte von \mathbf{A} wird **Spektrum** genannt.

Der **Spektralradius** $\rho(\mathbf{A})$ ist der größte Betrag aller Eigenwerte.

Beispiel 5.2

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbf{A} hat die **Eigenvektoren** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den **Eigenwerten** $\lambda = 2$ und $\mu = -2$.

Also gilt für das **Spektrum**

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{2, -2\}$$

und der **Spektralradius** ist gleich 2.

Bemerkungen zu Eigenwerten und Eigenvektoren

- Da der Nullvektor natürlich immer auf sich selbst abgebildet wird, **verlangen wir von einem Eigenvektor stets $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.**
- In der Ebene beschreiben Eigenvektoren **Fixgeraden** linearer Abbildungen.
- Die durch die Eigenvektoren definierten Geraden werden auf sich selbst abgebildet (als Menge, nicht punktweise).
- Eine punktweise Abbildung wäre eine **Fixpunktgerade**. Dies sind Geraden definiert durch Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Reelle Eigenwerte müssen nicht existieren

- Eigenwertprobleme betrachtet man **üblicherweise nicht in \mathbb{R} , sondern in \mathbb{C}** , weil für eine allgemeine reelle Matrix die Existenz von reellen Eigenwerten nicht garantiert ist.
- So hat i. A. **eine Drehung keine Fixgeraden**. Dementsprechend hat die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nur komplexe Eigenwerte (Drehung um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$).

- Allerdings werden wir uns überwiegend mit **reellen symmetrischen Matrizen** befassen, die stets **nur reelle Eigenwerte** haben.

Eigenwerte symmetrischer Matrizen

Satz 5.3

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:

- (i) Alle *Eigenwerte* von \mathbf{A} sind *reell*.
- (ii) Es gibt n *linear unabhängige Eigenvektoren* von \mathbf{A} .
- (iii) Sind $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ zwei *linear unabhängige Eigenvektoren* von \mathbf{A} , so sind \mathbf{u} und \mathbf{v} *zueinander orthogonal*.
- (iv) Es existiert eine *orthogonale Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine *Diagonalmatrix* $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

Wie die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{D} aussehen, können wir uns leicht denken. Es sei

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{q}^{(1)} \quad \mathbf{q}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{q}^{(n)} \right)$$

wobei die Vektoren $\mathbf{q}^{(i)}$ linear unabhängige Eigenvektoren von \mathbf{A} mit $\|\mathbf{q}^{(i)}\| = 1$ und zugehörigen Eigenwerten λ_i sind.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{A} \mathbf{q}^{(1)} \quad \mathbf{A} \mathbf{q}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{A} \mathbf{q}^{(n)} \right) \\ &= \mathbf{Q}^T \left(\lambda_1 \mathbf{q}^{(1)} \quad \lambda_2 \mathbf{q}^{(2)} \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{q}^{(n)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(1)T} \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{(n)T} \end{pmatrix} \left(\lambda_1 \mathbf{q}^{(1)} \quad \lambda_2 \mathbf{q}^{(2)} \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{q}^{(n)} \right) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Fazit:

- \mathbf{Q} besteht spaltenweise aus den **normierten Eigenvektoren**.
- \mathbf{D} ist eine Diagonalmatrix mit den **Eigenwerten auf der Diagonalen**.

Beispiel 5.4

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{A} hat die Eigenvektoren

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$.

Also:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Probe: Tafel .

Analytische Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

Es gilt:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Wegen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ hat die rechte Gleichung genau dann eine Lösung $\neq \mathbf{0}$, wenn die Matrix $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ **singulär** ist.

Satz 5.5

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wenn gilt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

Definition 5.6

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt

$$P(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

charakteristisches Polynom von \mathbf{A} .

Die Eigenwerte sind also die **Nullstellen des charakteristischen Polynoms** einer Matrix.

Beispiel 5.7

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2 - 9 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 8 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 4 \text{ bzw. } -2$$

Fortsetzung Beispiel.

- Aus den Eigenwerten können wir nun Eigenvektoren berechnen.
- Dazu setzen wir einen Eigenwert λ einfach in das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ ein.
- Jede Lösung ($\neq \mathbf{0}$) dieses Gleichungssystems ist ein Eigenvektor (zum Eigenwert λ).
- Da $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ singularär ist, haben wir **freie Variablen**.

Für $\lambda = 4$ lautet die erste Zeile von $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$:

$$x_1 + 3x_2 = 4x_1$$

woraus $x_2 = x_1$ folgt. Analog erhalten wir für $\lambda = -2$:

$$x_1 + 3x_2 = -2x_1$$

woraus $x_2 = -x_1$ folgt.

Fortsetzung Beispiel.

x_1 ist unsere freie Variable. Wir setzen $x_1 = 1$ und erhalten damit die bekannten Eigenvektoren

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.8

Wir betrachten die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als Eigenwerte erhalten wir $\lambda = 3$ und $\mu = -2$.

Zugehörige Eigenvektoren sind z. B.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für Eigenwert } \lambda \text{ und } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für Eigenwert } \mu.$$

Herleitung: Tafel 

Bemerkung: \mathbf{u} und \mathbf{v} sind nicht orthogonal, da \mathbf{A} nicht symmetrisch ist.

Was bringen uns Eigenwerte?

Wir können bspw. die n -fache Anwendung einer linearen Abbildung **deutlich beschleunigen**.

Beispiel 5.9

Wo landet ein Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, wenn wir ihn n -mal mit der Matrix \mathbf{A} aus Beispiel 5.8 abbilden?

Bei $\mathbf{p}' := \mathbf{A}^n \mathbf{p}$.

Naive Berechnung: n -fache Matrix-Vektor-Multiplikation.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(0)} &= \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{(i+1)} &= \mathbf{A}\mathbf{p}^{(i)}\end{aligned}$$

Damit gilt: $\mathbf{p}' = \mathbf{A}^n \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(n)}$.

Aufwand: $O(n)$

Fortsetzung Beispiel.

Wir nehmen nun an, dass wir \mathbf{p} als Linearkombination der Eigenvektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} darstellen können, also

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' = \mathbf{A}^n \mathbf{p} &= \mathbf{A}^n (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \\ &= \alpha \mathbf{A}^n \mathbf{u} + \beta \mathbf{A}^n \mathbf{v} \\ &= \alpha \lambda^n \mathbf{u} + \beta \mu^n \mathbf{v} \\ &= \alpha 3^n \mathbf{u} + \beta (-2)^n \mathbf{v} \end{aligned}$$

Aufwand: $O(1)$ (wenn die Exponentenoperation Aufwand $O(1)$ haben)

Fortsetzung Beispiel.

Aber wie bestimmen wir α und β ?

Als eindeutige Lösung des LGS

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{p}$$

also

$$\begin{aligned} 3\alpha - 2\beta &= p_1 \\ \alpha + \beta &= p_2 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\alpha = \frac{p_1 + 2p_2}{5}, \quad \beta = \frac{3p_2 - p_1}{5}$$

Aufwand ist ebenfalls $O(1)$.

Fazit: Für jeden Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ können wir $\mathbf{A}^n \mathbf{p}$ in Zeit $O(1)$ berechnen.

Anwendungsbeispiele

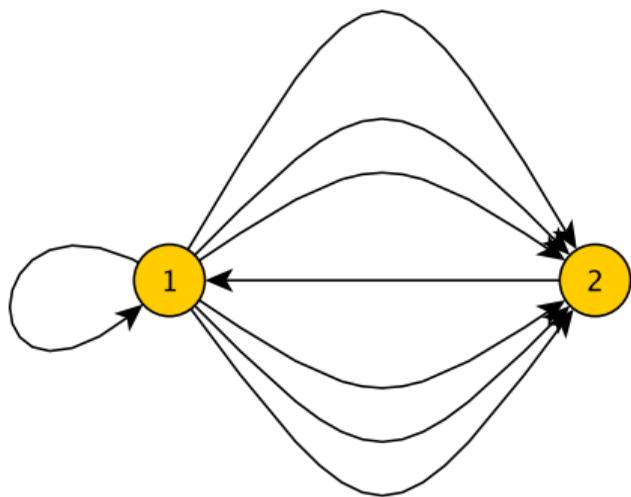
Natürlich geht es nicht nur um schnellere und numerisch stabilere Berechnungen. Eigenwerte spielen auch bei Analysen eine wichtige Rolle.

So können wir mithilfe von Eigenwerten:

- aus einer Adjazenzmatrix Formeln für die Anzahl an Kantenzügen zwischen zwei Knoten in einem Graphen herleiten,
- Wachstumsprozesse analysieren und die damit verbundenen Differenzgleichungen lösen und
- stochastische Systeme analysieren und z. B. Zustandsverteilungen oder stabile Endzustände ermitteln.

Anzahl Kantenzüge in gerichteten Graphen

Beispiel 5.10



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

- Aus der Graphentheorie: Die **Anzahl der Kantenzüge der Länge k** können wir in der Matrix $\mathbf{A}^k = (a_{i,j}^{(k)})$ ablesen.
- $a_{i,j}^{(k)}$ ist die Anzahl der Kantenzüge der Länge k von Knoten i zu Knoten j .

Berechnung:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^k &= \left(\mathbf{A}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{5} 3^{k-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} (-2)^{k-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{6}{5} 3^{k-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} (-2)^{k-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{k+1} + (-1)^k \cdot 2^{k+1} & 2 \cdot 3^{k+1} - 3 \cdot (-1)^k \cdot 2^{k+1} \\ 3^k + (-1)^{k-1} \cdot 2^k & 2 \cdot 3^k - 3 \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^k \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wachstumsprozesse und Differenzengleichungen

Den bekanntesten Wachstumsprozess beschrieb **Leonardo Fibonacci** im Jahr 1202:

- In der 1. Zeitperiode haben wir ein (neugeborenes) Kaninchenpaar.
- Jedes Kaninchenpaar benötigt zwei Zeitperioden bis zur Geschlechtsreife.
- Jedes geschlechtsreife Kaninchenpaar hat in einer Periode genau ein junges Kaninchenpaar als Nachkommen.
- Kaninchen sterben nicht.

Mathematisches Modell für die Anzahl f_n der **Kaninchenpaare in Zeitperiode n** :

$$f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 3$$

Allgemeines Ziel für solche Wachstumsmodelle:

- aus der rekursiven Formulierung Aussagen über die Größenordnung des Wachstums ermitteln
- Idealfall: explizite Formel für die f_n

Im Fall der Fibonacci-Zahlen kennen wir die Antwort.

Satz 5.11 (Formel von Moivre-Binet)

Für die durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (für $n \geq 2$) rekursiv definierte Fibonacci-Folge gilt:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Bezug zu Eigenwerten

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Herleitung der Formel von Moivre-Binet:

- Eigenwerte und -vektoren der Matrix bestimmen.
- Startvektor als Linearkombination von Eigenvektoren darstellen.
- Daraus ergibt sich eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen.

KFZ-Schadenfreiheitsklassen

- Versicherungsprämien der KFZ-Versicherung richten sich nach dem Risiko
- Bester Indikator für das Risiko: Anzahl der Schadensfälle in der Vergangenheit
- Systems der **Schadenfreiheitsklassen**
- Wir gehen von einer Menge $\{K_1, \dots, K_n\}$ solcher Klassen und Übergangsregeln zwischen diesen Klassen aus.
- K_1 sei dabei die Klasse für Neueinsteiger.

Beispiel 5.12

Wir gehen von vier Klassen aus:

	K_1	K_2	K_3	K_4
Rabatt	0	10	20	40

Übergangsregeln:

- Kein Schadensfall: Im Folgejahr eine Klasse höher (oder in K_4 bleiben).
- Ein Schadensfall: Im Folgejahr eine Klasse zurück (oder in K_1 bleiben).
- Mehr als ein Schadensfall: Im Folgejahr zurück in Klasse K_1 .

Fortsetzung Beispiel.

Es sei $p_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde, der dieses Jahr in Klasse j ist, im nächsten Jahr in Klasse i ist und es sei

$$\mathbf{P} = (p_{i,j}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Weiterhin beschreibe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ die Anzahl der Kunden in den vier Schadenfreiheitsklassen. Dann beschreibt

$$\mathbf{P}^k \mathbf{x}$$

die Anzahl der Kunden in den Schadenfreiheitsklassen in k Jahren.

Interessant ist insbesondere wie sich dies langfristig verhält:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k \mathbf{x}$$

Fortsetzung Beispiel.

Es sei

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \\ 0.85 & 0.00 & 0.10 & 0.00 \\ 0.00 & 0.85 & 0.00 & 0.10 \\ 0.00 & 0.00 & 0.85 & 0.85 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Wir untersuchen $\mathbf{x}^{(k)} := \mathbf{P}^k \mathbf{x}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{x}^{(0)}$	0.3	0.2	0.1	0.4
$\mathbf{x}^{(1)}$	0.1	0.265	0.21	0.425
$\mathbf{x}^{(2)}$	0.087	0.106	0.268	0.540
$\mathbf{x}^{(3)}$	0.069	0.100	0.144	0.686
$\mathbf{x}^{(5)}$	0.064	0.072	0.133	0.731
$\mathbf{x}^{(10)}$	0.063	0.067	0.131	0.740
$\mathbf{x}^{(20)}$	0.063	0.066	0.131	0.740

Gerschgorin-Kreise

Definition 5.13

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Mengen

$$K_j := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{j,j}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{j,k}| \right\}$$

heißen **Gerschgorin-Kreise**.

Gerschgorin-Kreise sind Kreise in \mathbb{C} mit

- dem Diagonalelement $a_{j,j}$ als **Mittelpunkt** und
- einem **Radius** so groß wie die j -te Zeilenbetragssumme minus Diagonalelement.

Lokalisierung von Eigenwerten

Satz 5.14

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit den Gerschgorin-Kreisen $K_j, j = 1, \dots, n$. Dann gilt:

(i)

$$\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n K_j$$

Die Eigenwerte von \mathbf{A} liegen also in der *Vereinigung der Gerschgorin Kreise*.

(ii) Ist die Vereinigung von $1 \leq p < n$ Gerschgorin-Kreisen K' disjunkt zur Vereinigung K'' der anderen Gerschgorin-Kreise, dann liegen in K' genau p und in K'' genau $n - p$ Eigenwerte von \mathbf{A} .

Folgerung 5.15

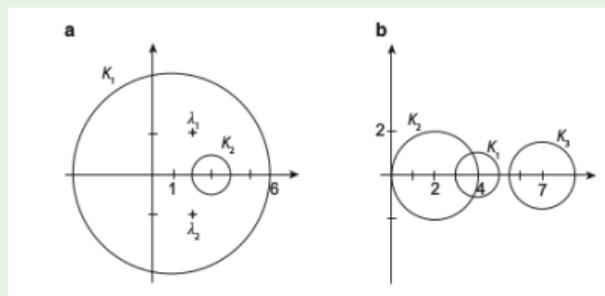
Wenn die Gerschgorin-Kreise K_j alle disjunkt sind, dann liegt in jedem Kreis K_j genau ein Eigenwert von \mathbf{A} .

Beispiel 5.16

Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0.5 & 7 \end{pmatrix}$$

Gerschgorin-Kreise:



Von-Mises-Vektoriteration

- Bei vielen Anwendungen ist der **betragsgrößte Eigenwert** am wichtigsten.
- Wir gehen davon aus, dass der betragsgrößte Eigenwert **eindeutig** ist, also

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

- Wir starten mit einem Vektor $\mathbf{x}^{(0)}$ und bilden dann

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$$

- Wenn \mathbf{x} eine Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{q}^{(i)}$ ist, also

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{q}^{(i)}$$

dann erhalten wir

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{q}^{(i)}$$

- Gilt $\alpha_1 \neq 0$, dann wird

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{q}^{(i)}$$

für genügend großes k durch λ_1 dominiert.

- Für einen Vektor \mathbf{y} mit $\langle \mathbf{y}, \mathbf{q}^{(1)} \rangle \neq 0$ gilt außerdem

$$\langle \mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y} \rangle \approx \lambda_1 \langle \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y} \rangle$$

für genügend großes k . Damit folgt

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y} \rangle}$$

- Außerdem konvergiert dann die Folge

$$\mathbf{z}^{(k)} := \psi_k \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}$$

gegen den normierten Eigenvektor $\mathbf{q}^{(1)}$.

- Dabei müssen wir ψ_k so wählen, dass die erste von null verschiedene Komponente von $\mathbf{z}^{(k)}$ positiv ist.
- Das hier beschriebene Verfahren heißt **Von-Mises-Vektoriteration**.

Beispiel 5.17

Wir berechnen den größten Eigenwert der Matrix **B** von Beispiel 5.16.

Quelltext siehe Homepage.

Als Ergebnis erhalten wir $\lambda_1 = 7.1681$ und

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0636 \\ 0.2014 \\ 0.9774 \end{pmatrix}$$

Deflation

Wie kann man **weitere Eigenwerte** einer Matrix \mathbf{A} berechnen, wenn man einen kennt?

Wir betrachten zunächst eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit bekanntem Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor \mathbf{q} .

Sei

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \frac{\lambda}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} \mathbf{q}^T$$

Dann gilt:

$$\mathbf{B} \mathbf{q} = \left(\mathbf{A} - \frac{\lambda}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} \mathbf{q}^T \right) \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{q} - \frac{\lambda}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \lambda \mathbf{q} - \lambda \mathbf{q} \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{q}}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} = \mathbf{0}$$

Für die Matrix \mathbf{B} ist also \mathbf{q} ein **Eigenvektor zum Eigenwert 0**.

Was passiert mit einem Eigenvektor \mathbf{r} zu einem anderen Eigenwert μ ?

$$\mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{r} - \frac{\lambda}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}\mathbf{q}^T \mathbf{r} = \mu \mathbf{r}$$

wegen $\mathbf{q}^T \mathbf{r} = 0$. Die **anderen Eigenwerte bleiben also erhalten**.

Durch Untersuchung der Matrix \mathbf{B} können wir somit weitere Eigenwerte berechnen.

Dieses Verfahren nennt man **Deflation**.

Beispiel 5.18

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$ mit den Eigenvektoren

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \frac{\lambda_1}{\langle \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(1)} \rangle} \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$ mit den gleichen Eigenvektoren wie \mathbf{A} .

Ähnliche Matrizen

Definition 5.19

Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn eine reguläre Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}.$$

Beispiel 5.20

Die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

sind ähnlich, denn mit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt sich} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Ähnliche Matrizen und Eigenwerte

Satz 5.21

Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die zueinander ähnlich sind, haben die gleichen Eigenwerte.

Beweis.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) &= \det(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} - \lambda \mathbf{E}) \\ &= \det(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} - \mathbf{S}^{-1} \lambda \mathbf{E} \mathbf{S}) \\ &= \det(\mathbf{S}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{S}) \\ &= \det(\mathbf{S}^{-1}) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \det(\mathbf{S}) \\ &= \det(\mathbf{S})^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \det(\mathbf{S}) \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\end{aligned}$$

Eigenvektoren ähnlicher Matrizen

Satz 5.22

Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnliche Matrizen.

Ist $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von \mathbf{B} zum Eigenwert λ , dann ist \mathbf{Sx} Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ .

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{Sx}) &= \mathbf{SBS}^{-1}(\mathbf{Sx}) \\ &= \mathbf{SBx} \\ &= \lambda\mathbf{Sx}\end{aligned}$$

QR-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte (1)

Wir wollen mit **einem** Algorithmus alle Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmen.

Grundidee:

- Transformiere \mathbf{A} mit geschickt gewählter orthogonalen Matrix \mathbf{Q} :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

- Sorge dabei dafür, dass \mathbf{A}' größere Diagonal- und kleinere Nichtdiagonalelemente hat.
- Wiederhole dies, bis \mathbf{A}' nahezu diagonal ist.

Hauptachsentransformation

Satz 5.23

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix.

Dann besitzen die Matrizen

$$\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

dieselben Eigenwerte.

QR-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte (2)

- $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$
- Wiederhole:
 - ▶ Berechne eine QR-Zerlegung von $\mathbf{A}^{(k)}$: $\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)}\mathbf{R}^{(k)}$.
 - ▶ Setze $\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)}\mathbf{Q}^{(k)}$.
 - ▶ $k := k + 1$

bis $\mathbf{A}^{(k)}$ nahezu eine Diagonalmatrix ist.

Bemerkung: Der Schritt $\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)}\mathbf{Q}^{(k)}$ ist eine Ähnlichkeitstransformation.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(k)} &= \mathbf{Q}^{(k)}\mathbf{R}^{(k)} \\ \Rightarrow \mathbf{R}^{(k)} &= \left(\mathbf{Q}^{(k)}\right)^T \mathbf{A}^{(k)} \\ \Rightarrow \mathbf{A}^{(k+1)} &= \mathbf{R}^{(k)}\mathbf{Q}^{(k)} = \left(\mathbf{Q}^{(k)}\right)^T \mathbf{A}^{(k)}\mathbf{Q}^{(k)}\end{aligned}$$

Beispiel 5.24

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{R}^{(0)} \begin{pmatrix} -0.8944 & 0.4472 \\ 0.4472 & 0.8944 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2.2361 & 2.6833 \\ 0 & 3.1305 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{R}^{(0)}\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(1)}\mathbf{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.9162 & -0.4008 \\ -0.4008 & 0.9162 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.4928 & -2.4049 \\ 0 & 2.0041 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)}\mathbf{Q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4.1639 & -0.8033 \\ -0.8033 & 1.8361 \end{pmatrix}$$

Nach zehn Iterationen entsteht

$$\mathbf{A}^{(10)} = \begin{pmatrix} 4.4142 & -0.0002 \\ -0.0002 & 1.5858 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

Die Eigenvektoren sind die Spalten der Matrix

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(0)} \cdot \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \mathbf{Q}^{(2)} \dots$$

Nach zehn Iterationen ergibt sich

$$\mathbf{Q}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.3828 & 0.9238 \\ -0.9238 & 0.3828 \end{pmatrix}.$$

Konvergenz des QR-Verfahrens

Satz 5.25

Sei \mathbf{A} eine symmetrische Matrix und für alle Eigenwerte λ_i ($i = 1, \dots, n$) von \mathbf{A} gelte

$$|\lambda_i| \neq |\lambda_j| \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

Dann konvergiert das QR-Verfahren gegen eine Diagonalmatrix.

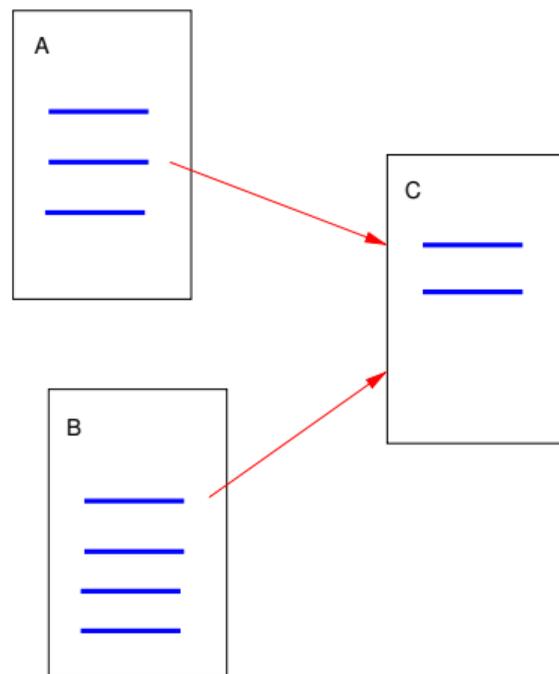
- insbesondere **keine Konvergenz bei zwei Eigenwerten, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden**, also $\lambda_i = -\lambda_j$
- in praktischen Fällen **auch dann Konvergenz, wenn Eigenwerte mehrfach auftreten**, also $\lambda_i = \lambda_j$
- Symmetrische und positiv definite Matrizen haben nur positive Eigenwerte.
- Daher können wir **bei diesen Matrizen von einer Konvergenz ausgehen**.

Effizienz und Konvergenzgeschwindigkeit

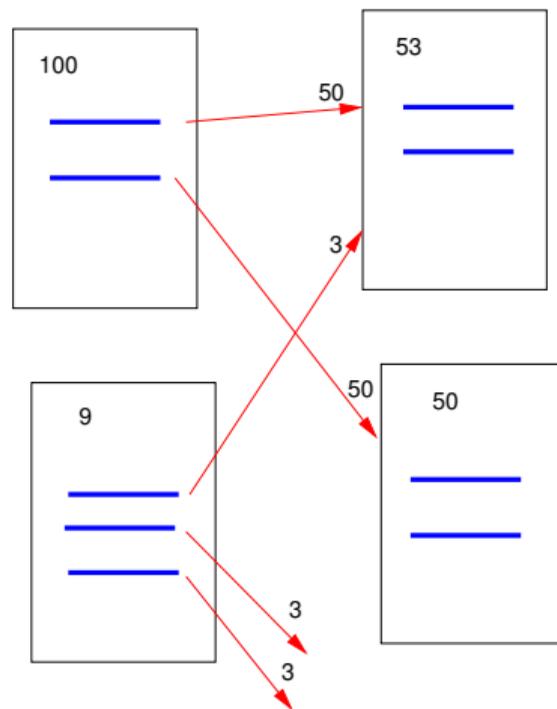
- In jedem Iterationsschritt muss eine QR-Zerlegung berechnet werden. Aufwand $O(n^3)$.
- Weiterhin müssen zwei Matrixmultiplikation durchgeführt werden. Aufwand $O(n^3)$.
- Das Verfahren konvergiert u. U. sehr langsam, insbesondere wenn zwei Eigenwerte existieren für die $|\lambda_i - \lambda_j|$ klein ist.
- Die Anzahl der notwendigen Iterationen ist typischerweise deutlich größer als n .
- Es gibt **Techniken, die das QR-Verfahren deutlich beschleunigen**:
 - ▶ Tridiagonalmatrizen: QR-Zerlegungen und Matrixmultiplikationen können damit in Zeit $O(n^2)$ ausgeführt werden.
 - ▶ Shifts: Die Anzahl der notwendigen Iterationen kann deutlich verringert werden.

Page Rank

- Google versucht die Bedeutung von Webseiten mithilfe des sogenannten **Page Rank** zu ermitteln.
- Der Page Rank einer Seite basiert **ausschließlich auf der Verweisstruktur** des Webs.
- Der Inhalt einer Seite hat dagegen keinen direkten Einfluss auf den Page Rank.



- Für eine Seite v heißt ein Verweis von einer anderen Seite hin zu v **Backlink**.
- Ein Verweis von v zu einer anderen Seite heißt **Forward Link**.
- Dokumente, die viele Backlinks haben, werden als wichtig erachtet und sollen eine hohen Page Rank erhalten.
- Über die Forward Links gibt eine Seite wiederum ihren Page Rank an andere Seiten weiter.
- Der **Page Rank verteilt sich dabei gleichmäßig auf die Forward Links**.



Simplified Page Rank

Die Page Rank Werte sind so zu wählen,

- dass sich der **Page Rank** jeder Seite als **Summe der über die Backlinks erhaltenen Page Rank Werte ergibt** und
- für jede Seite ihr **Page Rank gleichmäßig auf die Forward Links verteilt** wird.

Dies entspricht einem (unterbestimmten) linearen Gleichungssystem.

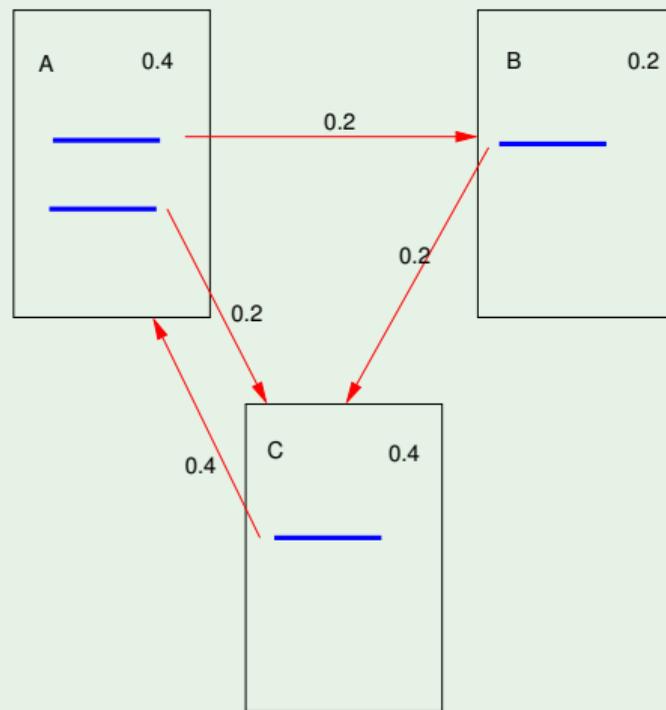
Beispiel 5.26

Es seien a, b, c der Page Rank für die Seiten A, B, C .

$$\begin{aligned} c &= a \\ \frac{1}{2}a &= b \\ \frac{1}{2}a + b &= c \end{aligned}$$

Eine Lösung ist:

$$a = 0.4, b = 0.2, c = 0.4$$



Definition: Simplified Page Rank

Definition 5.27

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $n = |V|$. Dann ist der **Simplified Page Rank** bis auf einen konstanten Faktor c für einen Knoten $v \in V$ definiert durch:

$$P(v) = \sum_{(w,v) \in E} \frac{P(w)}{\text{outdeg}(w)}$$

Page Rank und Eigenvektor

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix ($n = |V|$) mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1/\text{outdeg}(v_j) & \text{falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin sei \mathbf{p} der Vektor der Page Rank Werte für die Knoten v_1, v_2, \dots, v_n .

Dann entspricht die Gleichung aus Definition 5.27:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$$

Der Page Rank Vektor ist also ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix \mathbf{A} .

Lemma 5.28

Für den Spektralradius $\sigma(\mathbf{A})$ der Matrix \mathbf{A} gilt:

$$\sigma(\mathbf{A}) \leq 1$$

Beweis.

- Mithilfe der Gerschgorin-Kreise und Satz 5.14
- Es gilt $a_{j,j} = 0$ und für die transponierte Matrix

$$\sum_{k=1}^n |a_{j,k}| = 1$$

- Damit folgt $|z| \leq 1$ für alle z .

Berechnung des Simplified Page Rank

- Zur Berechnung nutzen wir **Vektoriteration**.
- Wir starten mit einem beliebigen Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, der eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** darstellt, d. h.
 - ▶ $p_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$
 - ▶ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- Unter gewissen Voraussetzungen (diskutieren wir nachfolgend) ist **Konvergenz der Vektoriteration** garantiert.
- Wir berechnen also einfach $\mathbf{A}^n \mathbf{p}$ für genügend großes n .

Stochastische Matrix

Definition 5.29

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **spaltenstochastisch**, wenn jeder Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(j)}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, also:

- $a_{i,j} \geq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und
- $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Wir nennen solch eine Matrix auch **Übergangsmatrix**.

Folgerung 5.30

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

*Gilt $\text{outdeg}(v) \geq 1$ für alle $v \in V$, dann ist die Matrix \mathbf{A} für die Berechnung des Simplified Page Rank **spaltenstochastisch**.*

Berechnungsbeispiel

Beispiel 5.31

Für den Graphen aus Beispiel 5.26 lautet die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir starten mit $\mathbf{p} = (1, 0, 0)^T$.

	p_1	p_2	p_3
1	0	0.5	0.5
2	0.5	0	0.5
5	0.5	0.125	0.375
10	0.4063	0.1875	0.4063
20	0.3994	0.2002	0.4004
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
∞	0.4	0.2	0.4

Random Surfer Modell

- Wir können den Page Rank auch mittels eines **Random Walk** auf einem Graphen interpretieren.
- Man startet an einem beliebigen Knoten.
- Wenn man sich an einem Knoten befindet, wählt man **zufällig (und gleichverteilt) eine der ausgehenden Kanten**.
- Der Page Rank entspricht dann der **Grenzverteilung der Besuchswahrscheinlichkeiten** (Wahrscheinlichkeit, dass man sich zum Zeitpunkt t an Knoten v befindet) für $t \rightarrow \infty$.
- Diese Sichtweise liefert auch einen naiven aber ineffizienten Berechnungsansatz: **Simulation**.

Konvergenzvoraussetzungen

Aus dem Random Surfer Modell wird deutlich, dass wir nicht für jeden Graphen

- Konvergenz und
- Unabhängigkeit des Grenzwertes von der Startverteilung

erwarten können.

Mögliche Schwierigkeiten:

- Es kann Knoten v ohne ausgehende Kanten geben, also $\text{outdeg}(v) = 0$. Dann ist die Matrix \mathbf{A} nicht spaltenstochastisch.
- Der gerichtete Graph G ist nicht stark zusammenhängend.
- Der gerichtete Graph ist nicht aperiodisch.

Aperiodizität

Definition 5.32

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

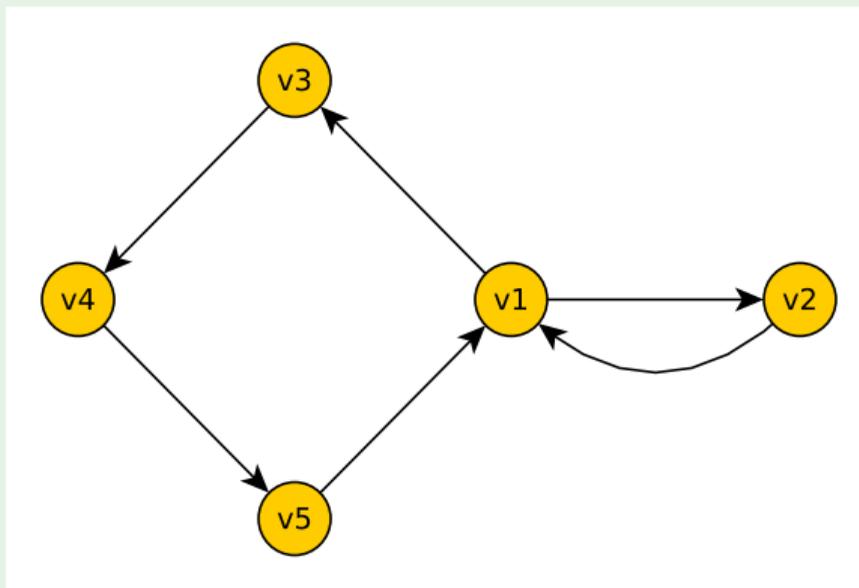
Ein Knoten $v \in V$ heißt **periodisch** mit Periode $k > 1$, wenn k die größte Zahl ist, so dass alle geschlossenen Kantenzüge mit v als Start- und Endknoten eine Länge haben, die ein Mehrfaches von k ist.

Ein Knoten, der nicht periodisch ist (d. h. $k = 1$), heißt **aperiodisch**.

G heißt **aperiodisch**, wenn alle Knoten $v \in V$ aperiodisch sind.

Beispiel 5.33

Der folgende Graph $G = (V, E)$ ist **nicht aperiodisch**:



Es gilt $k = 2$ für alle Knoten $v \in V$.

Vom Simplified Page Rank zum Page Rank

- Idee: Erweitere den Simplified Page Rank, so dass **stets Konvergenz gegen einen eindeutigen Grenzwert gewährleistet ist**.
- Hierzu erweitert man den gegebenen Graphen zu einem **vollständigen Graphen** (inklusive Schlingen).
- Dabei haben die **originären Kanten eine deutlich höhere Übergangswahrscheinlichkeit** als die neu hinzugefügten.
- Durch den Übergang zu einem vollständigen Graphen
 - ▶ **hat jeder Knoten ausgehende Kanten**,
 - ▶ ist der Graph **stark zusammenhängend** und
 - ▶ **aperiodisch**.

Mathematische Konstruktion des Page Rank

Definition 5.34

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und es sei weiterhin:

- $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ der Graph der entsteht, wenn für in G für jeden Knoten $v \in V$ mit $\text{outdeg}(v) = 0$ zusätzliche Kanten (v, w) für alle $w \in V$ einfügen,
- \mathbf{A} die Matrix wie beim Simplified Page Rank für den Graphen \tilde{G} ,
- n die Anzahl der Knoten von G ,
- $\mathbf{1}$ eine $n \times n$ Matrix, deren Komponenten alle 1 sind,
- $d \in (0, 1)$, der sogenannte **Abschwächungsfaktor (damping factor)**.

Dann ist der **Page Rank** bis auf einen konstanten Faktor c für einen Knoten $v \in V$ definiert durch:

$$P(v) = \frac{1-d}{n} + d \sum_{(w,v) \in E} \frac{P(w)}{\text{outdeg}(w)}$$

Folgerung 5.35

Der Page Rank entspricht einem Eigenvektor der Matrix:

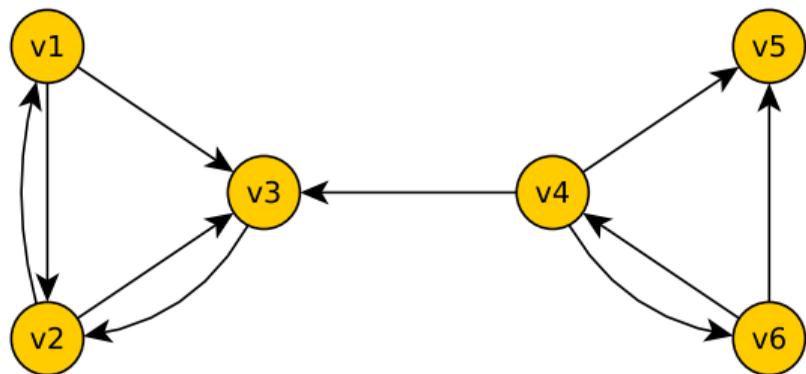
$$(1 - d)\frac{1}{n}\mathbf{1} + d\mathbf{A}$$

wobei \mathbf{A} die Simplified Page Rank Matrix des erweiterten Graphen \tilde{G} ist.

Berechnungsbeispiel

Beispiel 5.36

Wir betrachten den Graphen:



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Page Rank für $d = 0.85$ mit Sage .

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0.19	0.35	0.28	0.06	0.07	0.05

Diskussion Page Rank

- In den Originalveröffentlichungen zum Page Rank ist $d = 0.85$.
- Die Matrix \mathbf{A} ist bei großen Graphen in der Regel **dünn besetzt**.
- Daher sollte man bei der Berechnung auch **nicht zu einer gemeinsamen Matrix** für $(1 - d)\frac{1}{n}\mathbf{1} + d\mathbf{A}$ übergehen.
- Stattdessen:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \mathbf{A}\mathbf{p} \\ \mathbf{p} &= \frac{1-d}{n}\mathbf{1}\mathbf{p} + d \cdot \mathbf{q}\end{aligned}$$

Der Vektor $\frac{1-d}{n}\mathbf{1}\mathbf{p}$ besteht dabei aus lauter identischen Komponenten und ändert sich nie (warum?), muss also nur einmal ausgewertet werden!

- So kann man den
 - ▶ Speicherplatz für die Matrix kompakt halten und
 - ▶ effiziente SpMV-Verfahren (Sparse matrix-vector multiplication) nutzen.

Zusammenfassung

- Eigenwerte und Eigenvektoren zur **Analyse von Prozessen oder Graphen**
- Herleitung von Formeln für $\mathbf{A}^n \mathbf{x}$
- **Gerschgorin-Kreise** zur Lokalisierung von Eigenwerten
- Berechnung des betragsgrößten Eigenwerts mithilfe der **von-Mises-Vektoriteration**
- Berechnung weiterer Eigenwerte mittels **Deflation**
- **Page Rank** zur Bewertung von Knoten in gerichteten Graphen
- Page Rank entspricht **Eigenvektor zum Eigenwert 1** einer **Übergangsmatrix** für einen stark **zusammenhängenden** und **aperiodischen** Graphen.