



## Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

### Aufgabenblatt 9

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 11. Juni 2024.

Sollpunktzahl: 12 Punkte

#### Aufgabe 1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

2+2+2+2=8 Punkte

(a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie für  $\mathbf{A}$  eine orthogonale Matrix  $\mathbf{Q}$  und eine Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  an, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

gilt.

(c) Zeigen Sie:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{D}^n\mathbf{Q}^T.$$

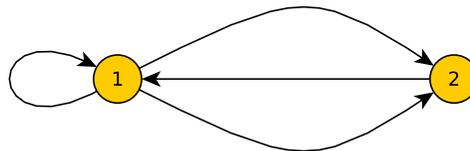
(d) Geben Sie  $\mathbf{A}^n$  an.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung aus (c).

#### Aufgabe 2 (Adjazenzmatrix und Wegeberechnungen)

1+2+2+3+1+2=11 Punkte

Gegeben Sei der folgende gerichtete Graph  $G$ :



(a) Geben Sie die Adjazenzmatrix  $\mathbf{A}$  von  $G$  an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  und geben Sie zugehörige Eigenvektoren an.

(c) Stellen Sie die Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}$  als Linearkombination von Eigenvektoren dar.

(d) Leiten Sie eine Formel für  $\mathbf{A}^n$  her.

(e) Wie viele Kantenzüge der Länge 10 gibt es zwischen den Knoten 1 und 2?

(f) Wir betrachten alle Kantenzüge der Länge 10, die in Knoten 1 beginnen und wählen einen dieser Kantenzüge gleichverteilt aus. Was ist wahrscheinlicher: Dass der ausgewählte Kantenzug in Knoten 1 oder in Knoten 2 endet? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.