



Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Aufgabenblatt 10

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 18. Juni 2024.

Sollpunktzahl: 8 Punkte

Aufgabe 1 (Diskreter Wachstumsprozess)

2+2+2+2=8 Punkte

Ein Wachstumsprozess werde beschrieben durch die Gleichung

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}, \quad \text{für } n \geq 3,$$

mit den Anfangswerten

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2.$$

- (a) Geben Sie eine Matrix \mathbf{B} an, die den Wachstumsprozess beschreibt, d. h. für \mathbf{B} soll gelten (vgl. Folie 311):

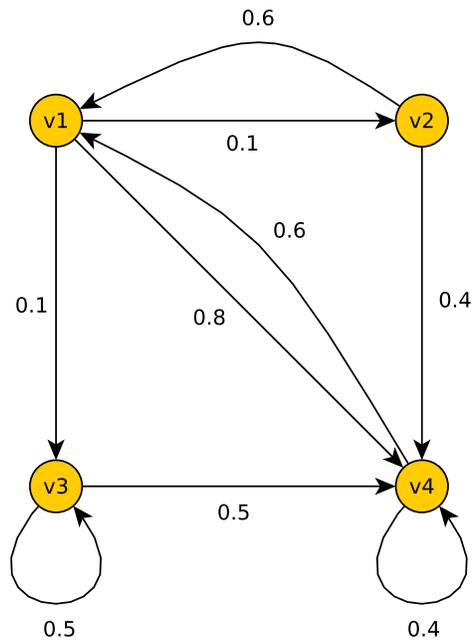
$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{B} .
- (c) Stellen Sie den Anfangsvektor $(a_2, a_1, a_0)^T = (2, 1, 0)^T$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar.
- (d) Leiten Sie eine explizite Formel für a_n her.

Aufgabe 2 (Cops and Robbers)

5 Punkte

Mafiaboss Jonny Controlletti ist seit einiger Zeit auf der Flucht vor der Polizei. Hierzu wechselt er jede Nacht sein Versteck. Ein eingeschleuster V-Mann hat der Polizei den folgenden Plan zukommen lassen, aus dem ersichtlich wird, wie Controlletti sein Versteck wechselt.



Jeder Knoten des Graphen stellt eines der vier Verstecke von Controlletti dar. Eine gerichtete Kante (v_i, v_j) beschreibt einen möglichen nächtlichen Umzug von Versteck v_i zu Versteck v_j . Die der Kante (v_i, v_j) zugeordnete Zahl $p_{i,j}$ gibt dabei die folgende bedingte Wahrscheinlichkeit an:

$$P(\text{Controlletti ist am Tag } t + 1 \text{ in Versteck } j | \text{Controlletti ist am Tag } t \text{ in Versteck } i).$$

Die in Sankt Augustin beheimatete Spezialeinheit GSG 9 ist zum Einsatz bereit, sie kann aber nur ein Versteck stürmen.

- Welches Versteck soll die GSG 9 stürmen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, Jonny Controlletti dort anzutreffen?

Hinweis: Ein kleines Programm ist hier sicher hilfreich (vgl. Beispiel 5.12).