Kapitel 1

Zahlen

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Inhalt

1. Zahlen
   - Körper
   - Die reellen Zahlen als angeordneter Körper
   - Vollständigkeit der reellen Zahlen
   - Die komplexen Zahlen als Vektoren

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Aus “Einführung in Diskrete Mathematik und Lineare Algebra” sind uns bekannt:

- die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\},$$

- die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Körper

Definition 1.1

Ein Körper ist ein Tripel $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $\mathcal{K}$ und zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften (Körperaxiomen):

(K1) $(\mathcal{K}, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element $0_{\mathcal{K}}$).

(K2) $(\mathcal{K} \setminus \{0_{\mathcal{K}}\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element $1_{\mathcal{K}}$).

(K3) Für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Bezeichnungen in einem Körper

Wir nutzen die üblichen Bezeichnungen: Für $a \in \mathcal{K}$ ist

- $-a$ das additiv Inverse von a und
- a^{-1} das multiplikativ Inverse von a.

Weiterhin definieren wir für $a, b \in \mathcal{K}$ die Differenz

$$a - b := a + (-b)$$

und den Quotienten

$$\frac{a}{b} = a/b := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a \text{ für } b \neq 0_{\mathcal{K}}.$$

Rechenregeln für Körper

Wir wissen, dass in jedem Körper $\mathcal{K}$ die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{array}{ll} -(-a) = a, & (-a) + (-b) = -(a+b), \\ (a^{-1})^{-1} = a, & a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1} \text{ für } a, b \neq 0_{\mathcal{K}}, \\ a \cdot 0_{\mathcal{K}} = 0_{\mathcal{K}}, & a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, & a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c. \end{array}$$

Jeder Körper ist nullteilerfrei:

$$a \cdot b = 0_{\mathcal{K}} \Rightarrow a = 0_{\mathcal{K}} \vee b = 0_{\mathcal{K}}.$$

Regeln für das Bruchrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d} \quad \text{für } c, d \neq 0_{\mathcal{K}} \\ \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad \text{für } c, d \neq 0_{\mathcal{K}} \\ \frac{a/c}{b/d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{für } b, c, d \neq 0_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

Charakterisierung der reellen Zahlen

In der Mathematik fragt man nicht: "Was sind Zahlen?", sondern: "Wie operiert man mit Zahlen?".

Ein Axiom ist eine Aussage, die als wahr angenommen wird.

Wir werden die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch drei Gruppen von Axiomen charakterisieren:

- die Körperaxiome,
- die Anordnungsaxiome und
- das Vollständigkeitsaxiom.

Körper- und Anordnungsaxiome gelten auch für die rationalen Zahlen, das Vollständigkeitsaxiom aber nicht.

Körper der reellen Zahlen

Wir wollen mit reellen Zahlen mittels der üblichen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) rechnen können.

Daher fordern wir:

Axiom 1

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Wie üblich ist 0 das neutrale Element der Addition und 1 das der Multiplikation.

Ordnungsrelation

Wir wollen reelle Zahlen untereinander “anordnen” können. Hierfür definieren wir, welche Regeln für solch eine Anordnung gelten sollen.

Definition 1.2

Es sei $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ ein Körper.

Eine Relation $\leq$ auf $\mathcal{K}$, die für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt, heißt Ordnungsrelation.

(A1) $a \leq b \vee b \leq a$ (Vergleichbarkeit, Reflexivität und Totalität)

(A2) $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$ (Identitätseigenschaft, Antisymmetrie)

(A3) $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ (Transitivität)

(A4) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (Monotonie bzgl. $+$)

(A5) $(0_\mathcal{K} \leq a \wedge 0_\mathcal{K} \leq b) \Rightarrow 0_\mathcal{K} \leq a \cdot b$ (Monotonie bzgl. $\cdot$)

$a \in \mathcal{K}, a \neq 0_\mathcal{K}$ heißt positiv, wenn $0_\mathcal{K} \leq a$ gilt, und negativ, wenn $a \leq 0_\mathcal{K}$ gilt.

Ordnungsbezeichungen

Weiterhin definieren wir die üblichen Bezeichnungen:

$$
\begin{aligned}
a \geq b \quad &:\Leftrightarrow \quad b \leq a \\
a < b \quad &:\Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge a \neq b \\
a > b \quad &:\Leftrightarrow \quad b < a \\
a \leq b \leq c \quad &:\Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge b \leq c \\
a \leq b < c \quad &:\Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge b < c \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Angeordneter Körper

Definition 1.3

Wir sagen, dass ein Körper $\mathcal{K}$ angeordnet werden kann, wenn auf $\mathcal{K}$ eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert werden kann.

Das Tupel $(\mathcal{K}, \leq)$ heißt dann angeordneter Körper.

Axiom 2

Der Körper $\mathbb{R}$ kann angeordnet werden.

Regeln für angeordnete Körper

Lemma 1.4

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) *Genau eine der drei Aussagen $a = b$, $a < b$, $a > b$ ist wahr.*

(ii) $(a \leq b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

(iii) $(0 < a \wedge 0 < b) \Rightarrow 0 < a \cdot b$

(iv) $(a \leq b \wedge c \geq 0) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

(v) $(a \leq b \wedge c \leq 0) \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Beweis.

(i) Wir müssen zeigen, dass mindestens eine der drei Aussagen gilt und dass höchstens eine der drei Aussgagen gilt.

Mindestens: Für den Fall $a = b$ ist eine Aussage erfült. Sei also $a \neq b$. Nach (A1) gilt $a \leq b \vee b \leq a$. Wegen $a \neq b$ folgt $a < b \vee b < a$.

Höchstens: $a = b$ schließt nach Definition $a < b$ und $a > b$ aus. Sei also $a \neq b$. Ann.: $a < b \wedge a > b$ ist wahr. Mit (A2) folgt daraus aber $a = b$. Widerspruch!

(ii) Aus (A3) folgt $a \leq c$. Ann.: $a = c$. Wegen $b < c$ gilt dann auch $b < a$. Wegen (i) ist dies ein Widerspruch zu $a \leq b$. Also gilt $a < c$.

(iii) Aus (A5) folgt $0 \leq a \cdot b$. Wegen (i) gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Damit folgt $a \cdot b \neq 0$, weil $\mathbb{R}$ als Körper nullteilerfrei ist. Also gilt $0 < a \cdot b$.

Fortsetzung Beweis.

(iv)

$$
\begin{aligned}
a \leq b &\overset{A4}{\Rightarrow} a + (-a) \leq b + (-a) \\
&\Rightarrow 0 \leq b - a \\
&\overset{A5}{\Rightarrow} 0 \leq (b - a) \cdot c \\
&\Rightarrow 0 \leq b \cdot c - a \cdot c \\
&\overset{A4}{\Rightarrow} a \cdot c \leq b \cdot c
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beweis.

(v)

$$\begin{aligned} & c \leq 0 \\ \overset{\text{A4}}{\Rightarrow} \quad & 0 = c + (-c) \leq (-c) \end{aligned}$$

Mit (iv) folgt

$$\begin{aligned} & a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \\ \overset{\text{A4}}{\Rightarrow} \quad & a \cdot (-c) + b \cdot c \leq 0 \\ \overset{\text{A4}}{\Rightarrow} \quad & b \cdot c \leq a \cdot c \end{aligned}$$

Vorzeichenregeln

Lemma 1.5

Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

(ii) $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot a > 0$

(iii) $a \cdot a \geq 0$

(iv) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

(v) $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned} & 0 \le a \\ \overset{\text{A4}}{\Rightarrow}\quad & 0 + (-a) \le a + (-a) \\ \Rightarrow\quad & -a \le 0 \end{aligned}$$

(ii) Aus $a \neq 0$ folgt $a \cdot a \neq 0$, weil $\mathbb{R}$ als Körper nullteilerfrei ist.

$$a \ge 0 \overset{\text{A5}}{\Rightarrow} a \cdot a \ge 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} a \cdot a > 0$$

$$a \le 0 \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} (-a) \ge 0 \overset{\text{A5}}{\Rightarrow} (-a) \cdot (-a) \ge 0 \Rightarrow a \cdot a \ge 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} a \cdot a > 0$$

Fortsetzung Beweis.

(iii)

$$\left.\begin{array}{lcl} a = 0 & \Rightarrow & a \cdot a = 0 \\ a \neq 0 & \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} & a \cdot a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot a \geq 0$$

(iv) $a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0.$

$$\begin{array}{cl} \text{Wegen (ii) gilt dann} & a^{-1} \cdot a^{-1} > 0 \\ \Rightarrow & a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} > a \cdot 0 \\ \Rightarrow & a^{-1} > 0 \end{array}$$

(v) analog zu (iv)

Bemerkungen zur Anordnung

- Auch wenn wir Lemma 1.4 und Lemma 1.5 nur für $\mathbb{R}$ formuliert haben, gelten die Aussagen in jedem angeordneten Körper.
- $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ bezeichnet die positiven reellen Zahlen.
- $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ bezeichnet die nichtnegativen reellen Zahlen.

Unendlichkeit von $\mathbb{R}$

Satz 1.6

$\mathbb{R}$ *hat unendlich viele Elemente.*

Beweis.

Nach Lemma 1.5 gilt $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$ und somit $1 > 0$.

Mit (A4) erhalten wir $1 + 1 > 1$ und daraus wieder mit (A4) $1 + 1 + 1 > 1 + 1$.

Diesen Prozess können wir beliebig oft wiederholen. □

- Die Argumentation im Beweis können wir auf jeden angeordneten Körper anwenden.
- Konsequenz: Endliche Körper wie bspw. die Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ können nicht angeordnet werden.

Monotonie der Quadratfunktion

Lemma 1.7

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$ gilt

$$a < b \Rightarrow a \cdot a < b \cdot b.$$

Beweis.

1. Fall: $a = 0$.

$$\begin{aligned} a = 0 \quad & \Rightarrow \quad b > 0 \\ & \overset{\text{Lemma 1.5 (ii)}}{\Rightarrow} \quad b \cdot b > 0 = a \cdot a \end{aligned}$$

2. Fall: $a > 0$.

$$a < b \overset{\text{Lemma 1.4 (iv)}}{\Rightarrow} a \cdot a \leq a \cdot b$$

Fortsetzung Beweis.

Mit Lemma 1.4 (ii) folgt aus $0 < a$ und $a < b$ auch $b > 0$ und somit

$$a < b \overset{\text{Lemma 1.4 (iv)}}{\Rightarrow} a \cdot b \leq b \cdot b.$$

Wegen (A3) folgt insgesamt $a \cdot a \leq b \cdot b$.

Ann.: $a \cdot a = b \cdot b$. Dann müsste auch

$$a \cdot a = a \cdot b$$

gelten und damit

$$0 = a \cdot (b - a).$$

Aus der Nullteilerfreiheit folgt dann $a = 0 \vee b = a$. Widerspruch!

Potenzen

Definition 1.8

Für eine beliebige reelle Zahl $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ defininieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \\ a^{n+1} &:= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Weiterhin sei für $n \in \mathbb{N}$

$$a^{-n} := (a^n)^{-1}.$$

a^{-n} bezeichnet also das Inverse von a^n bzgl. der Multiplikation.

Damit können wir z. B. kurz a^2 für $a \cdot a$ schreiben.

Die Aussage von Lemma 1.7 lautet damit

$$a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Fakultät

Definition 1.9

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt das Produkt

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Fakultät von n. Wir setzen $0! = 1$.

Beispiel 1.10

$$\begin{aligned}
5! &= 120 \\
10! &= 3628800 \\
20! &= 2432902008176640000 \\
30! &= 265252859812191058636308480000000 \approx 2.65 \cdot 10^{32}
\end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

Definition 1.11

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt der Ausdruck

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient von n über k.

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Satz 1.12

Es gilt:

(i)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(ii)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis.

✎ Tafel, Übungsaufgabe.

Binomische Formel

Satz 1.13

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Lemma 1.14

Für alle $q \in \mathbb{R}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Beweis zu Satz 1.13 ist Übungsaufgabe, Beweis zu Lemma 1.14: Tafel ✎.

Bernoullische Ungleichung

Satz 1.15

Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Beweis.

Mittels vollständiger Induktion.

$n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+n\cdot x)(1+x) \\ &= 1 + n\cdot x + x + n\cdot x\cdot x \\ &= 1 + (n+1)\cdot x + n\cdot x^2 \\ &\geq 1 + (n+1)\cdot x \end{aligned}$$

$\square$

An welcher Stelle benötigen wir im Beweis die Voraussetzung $x \geq -1$?

Betrag

Definition 1.16

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ heißt der Betrag von a.

Rechenregeln für den Betrag

Satz 1.17

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ *(Homogenität)*

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis.

(i) und (ii): Fallunterscheidungen, Tafel ✎

Fortsetzung Beweis.

Vorbemerkung: Offensichtlich gilt:

- $|a| \geq a$ und $|a| \geq -a$
- $|a| = |-a|$

(iii) Aus der Vorbemerkung folgt sowohl

$$|a| + |b| \geq a + b$$

als auch

$$|a| + |b| \geq (-a) + (-b) = -(a + b).$$

Da $|a + b|$ entweder $a + b$ oder $-(a + b)$ ist, folgt die Aussage.

Normierter Körper

Definition 1.18

Ein Körper $\mathcal{K}$, auf dem eine Abbildung

$$\begin{array}{rcccl} |\cdot| & : & \mathcal{K} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

definiert ist, so dass die Eigenschaften aus Satz 1.17 erfüllt sind, heißt normierter Körper und die Abbildung $|\cdot|$ wird Norm genannt.

- Nach Satz 1.17 ist jeder angeordnete Körper auch ein normierter Körper.
- Die Umkehrung gilt nicht. Ein Beispiel hierfür ist der Körper der komplexen Zahlen, den wir im übernächsten Abschnitt kennenlernen.

Umgekehrte Dreiecksungleichung

Satz 1.19

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Beweis.

- Aus der Dreiecksungleichung folgt $|a + b| - |b| \leq |a|$.
  Einsetzen von $a = x + y, b = -y$ gibt $|x| - |y| \leq |x + y|$.
- Setzt man stattdessen $b = -x$ ein, so erhalten wir $|y| - |x| \leq |x + y|$ und somit insgesamt

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

- Ersetzen wir nun y durch $-y$, dann erhalten wir auch noch

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

$\sqrt{2}$ ist irrational

Satz 1.20

Es gibt keine rationale Zahl x, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt.

Beweis.

Annahme: Es existiert $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Wegen $x \in \mathbb{Q}$ folgt $x = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen p und q.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \\
\Rightarrow \quad & p^2 = 2q^2 \\
\Rightarrow \quad & 2 | p^2 \\
\Rightarrow \quad & 2 | p \\
\Rightarrow \quad & p = 2r
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Wir setzen $p = 2r$ in die Gleichung $p^2 = 2q^2$ ein.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 4r^2 = 2q^2 \\
&\Rightarrow \quad 2r^2 = q^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|q^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|q
\end{aligned}
$$

Also folgt, dass 2 sowohl Teiler von p als auch von q ist. Widerspruch zu p und q sind teilerfremd!

Supremum und Infimum

Definition 1.21

Es sei $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper und $A \subseteq \mathcal{K}$.

- A heißt **nach oben (unten) beschränkt**, wenn ein $S \in \mathcal{K}$ (bzw. $s \in \mathcal{K}$) existiert mit $x \leq S$ (bzw. $x \geq s$) für alle $x \in A$.
  S (bzw. s) heißt dann **obere (bzw. untere) Schranke von A**.
- $S \in \mathcal{K}$ heißt **Supremum von A**, falls gilt:
  - S ist obere Schranke von A.
  - Für jede obere Schranke S' von A gilt $S \leq S'$.

  Wir schreiben **$\sup(A)$** für das Supremum von A.
- $s \in \mathcal{K}$ heißt **Infimum von A** falls gilt:
  - s ist untere Schranke von A.
  - Für jede untere Schranke s' von A gilt $s' \leq s$.

  Wir schreiben **$\inf(A)$** für das Infimum von A.

Fortsetzung Definition.

- Gilt $\sup(A) \in A$, dann nennen wir $\sup(A)$ auch das Maximum von A und schreiben $\max(A)$ für $\sup(A)$.
- Gilt $\inf(A) \in A$, dann nennen wir $\inf(A)$ auch das Minimum von A und schreiben $\min(A)$ für $\inf(A)$.

Beispiel 1.22

Für

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \right\}$$

gilt

$$\begin{aligned} \sup(A) &= 1, \\ \max(A) &: \text{ existiert nicht}, \\ \inf(A) &= 0, \\ \min(A) &= 0. \end{aligned}$$

Alternative Charakterisierung für Supremum

Lemma 1.23

Es sei $\mathcal{K}$ ein angeordneter Körper und $A \subseteq \mathcal{K}$ eine Teilmenge von $\mathcal{K}$.

$S \in \mathcal{K}$ ist genau dann das Supremum von A, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:

(i) *Für alle $x \in A$ gilt $x \leq S$.*

(ii) *Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in A$ mit $S - \epsilon < x \leq S$.*

Beweis.

$\Rightarrow$: Es sei S das Supremum von A.

- Nach Definition von Supremum ist S auch eine obere Schranke von A.
- Damit gilt (i), denn (i) entspricht genau der Definition einer oberen Schranke von A.

Fortsetzung Beweis.

Ann.: (ii) gilt nicht. D.h.

$$\exists \epsilon > 0 \, \forall x \in A : S - \epsilon \geq x$$

Damit wäre $S - \epsilon$ auch eine obere Schranke von A. Wegen $S - \epsilon < S$ ist dies ein Widerspruch zur Definition von Supremum.

$\Leftarrow$: Für S gelte (i) und (ii). Da (i) der Definition für obere Schranke von A entspricht ist die erste Supremumseigenschaft erfüllt.

Es sei S' eine beliebige obere Schranke von A. Ann.: $S > S'$.

- Dann folgt $\epsilon := S - S' > 0$.
- N.V. existiert ein $x \in A$ mit $x > S'$.
- Damit ist S' keine obere Schranke. Widerspruch.
- Also: $S \leq S'$.

Anwendung von Lemma 1.23

Beispiel 1.24

Wir zeigen formal

$$\sup \left\{ 1 - \frac{1}{4n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = 1,$$

in dem wir zeigen

- 1 ist eine obere Schranke der Menge und
- für alle $\epsilon > 0$ ist $1 - \epsilon$ keine obere Schranke.

Tafel ✎.

$\mathbb{R}$ als vollständiger Körper

Definition 1.25

Ein angeordneter Körper $\mathcal{K}$ heißt vollständig, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathcal{K}$ ein Supremum hat.

Aus Satz 1.20 und Lemma 1.23 folgt, dass die Teilmenge

$$A := \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$$

der rationalen Zahlen nichtleer und nach oben beschränkt ist, aber in $\mathbb{Q}$ kein Supremum hat. Also ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Axiom 3

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist vollständig.

Archimedisches Prinzip

Satz 1.26

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist damit nicht nach oben beschränkt.

Beweis.

Ann.: $\mathbb{N}$ sei eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Nach Axiom 3 existiert dann das Supremum $S := \sup(\mathbb{N})$. Damit ist $S - 1$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Es muss also eine natürliche Zahl n existieren mit $n > S - 1$. Dann ist aber $n + 1 \in \mathbb{N}$ und es gilt $n + 1 > S$. Widerspruch!

Wachstum von Potenzen

Satz 1.27

Es sei b eine reelle Zahl.

(i) *Ist $b > 1$, so existiert für alle $M \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$b^n > M$$

gilt.

(ii) *Ist $0 < b < 1$, so existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$b^n < \epsilon$$

gilt.

Beweis.

(i) Wir setzen $x := b - 1$. Damit gilt $x > 0$ und wir können die Bernoullische Ungleichung anwenden.

$$b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Nach dem Archimedischen Prinzip existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{M-1}{x}$. Hieraus folgt $b^n > M$.

(ii) Vorüberlegungen:

- Aus $b > 0$ folgt mit Lemma 1.5 (iv) auch $b^{-1} > 0$.
- Aus $0 < b < 1$ folgt $b^{-1} > 1$. ✎
- Es gilt $\left(b^{-1}\right)^n = (b^n)^{-1}$. ✎

Sei also $0 < b < 1$. Dann ist $b^{-1} > 1$. Nach (i) existiert zu $M = \epsilon^{-1}$ ein n, so dass gilt

$$(b^n)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^n > \epsilon^{-1}.$$

Hieraus folgt durch Invertieren die Behauptung.

Eindeutigkeit von $\sqrt{2}$

Lemma 1.28

Es existiert genau eine reelle Zahl $b > 0$ mit $b^2 = 2$.

Beweis.

Eindeutigkeit: Es seien b_1, b_2 reelle Zahlen mit $b_1^2 = b_2^2 = 2$. Dann folgt

$$0 = b_1^2 - b_2^2 = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2).$$

Es gilt also entweder $b_1 = b_2$ oder $b_1 = -b_2$. Mit Lemma 1.5 (i) folgt, dass es nur eine positive Lösung geben kann.

Existenz: Wegen Axiom 3 existiert das Supremum der Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 \leq 2\}.$$

Es sei $b := \sup(A)$. Wir zeigen jetzt $b^2 = 2$.

Fortsetzung Beweis.

Ann.: $b^2 < 2$.

Dann folgt $2 - b^2 > 0$. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{2b+1}{2-b^2} < n.$$

Es gilt

$$\frac{2b+1}{2-b^2} < n \Rightarrow b^2 + \frac{2b+1}{n} < 2.$$

Wegen $n \geq 1$ und $\frac{1}{n} \leq 1$ erhalten wir

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b+1}{n} < 2.$$

Daraus folgt $b + \frac{1}{n} \in A$ und $b + \frac{1}{n} > b = \sup(A)$. Widerspruch!

Fortsetzung Beweis.

Ann.: $b^2 > 2$.

Nach dem Archimedischen Prinzip existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\max\left\{\frac{1}{b}, \frac{2b}{b^2-2}\right\} < n.$$

Hieraus folgt

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} > 2.$$

Damit wäre $b - \frac{1}{n} < b$ eine obere Schranke von A. Widerspruch!

Also folgt mit Lemma 1.4 (i): $b^2 = 2$.

Eindeutigkeit k-ter Wurzeln

Lemma 1.29

Zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *existiert genau eine reelle Zahl* $b > 0$ *mit* $b^k = a$.

Quadratwurzeln und k-te Wurzeln

Definition 1.30

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $k \in \mathbb{N}$.

Die nach Lemma 1.29 eindeutig bestimmte positive reelle Zahl b mit der Eigenschaft $b^k = a$ heißt k-te Wurzel von a und wir schreiben $\sqrt[k]{a}$ für b.

Für $k = 2$ nennen wir b auch die (Quadrat-)Wurzel von a und schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 1.31

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$. Dann setzen wir

$$a^r := \left(\sqrt[q]{a}\right)^p .$$

Potenzregeln

Lemma 1.32

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}_+$ *und* $r, s \in \mathbb{Q}$ *gilt*

(i) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(ii) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(iii) $a^r b^r = (ab)^r$,

(iv) $a \neq 0 \to \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r} = a^{-r}$.

Hier ohne Beweis, da wir die Definition der Potenzen später auf reelle Exponenten erweitern werden.

Körper der komplexen Zahlen

Aus dem 1. Semester kennen Sie den Körper der komplexen Zahlen.

- $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b | a, b \in \mathbb{R}\}$
- Die Zahl i heißt imaginäre Einheit.
- Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$.
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$
  - $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

$\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper

Satz 1.33

Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *kann nicht angeordnet werden.*

Beweis.

In einem angeordneten Körper $\mathcal{K}$ gilt nach Lemma 1.5 $z^2 \geq 0_{\mathcal{K}}$ für alle $z \in \mathcal{K}$.

Unabhängig von einer Anordnung gilt in $\mathbb{C}$ aber stets $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$.

Inverse Elemente

Es sei $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} -z &= (-a) + \mathrm{i}(-b) = -a - \mathrm{i}b \\ z^{-1} &= \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\,(a - \mathrm{i}b)\,. \end{aligned}$$

Die konjugiert komplexe Zahl

Definition 1.34

Für eine komplexe Zahl $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ heißt

- $\mathrm{Re}(z) := a$ der Realteil von z,
- $\mathrm{Im}(z) := b$ der Imaginärteil von z,
- $\overline{z} := a - \mathrm{i}b$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Lemma 1.35

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Für $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2a \in \mathbb{R}, \\ z\overline{z} &= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Der Betrag komplexer Zahlen

Definition 1.36

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den Betrag $|z|$ durch

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Lemma 1.37

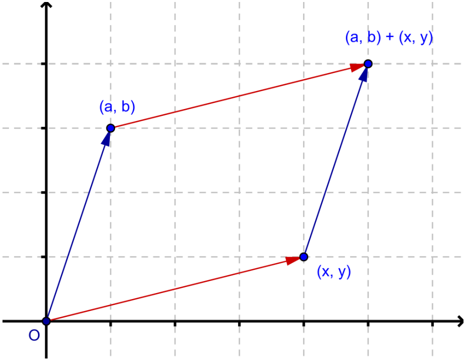
$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \text{für } z \neq 0, \\ |z| &= |\overline{z}|, \\ |z| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}}. \end{aligned}$$

Satz 1.38

$\mathbb{C}$ bildet mit dem Betrag $|\cdot|$ als Norm einen normierten Körper.

Komplexe Zahlen als Vektoren

Durch die Bijektivität zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ können wir komplexe Zahlen als Vektoren bzw. Punkte der Ebene darstellen.

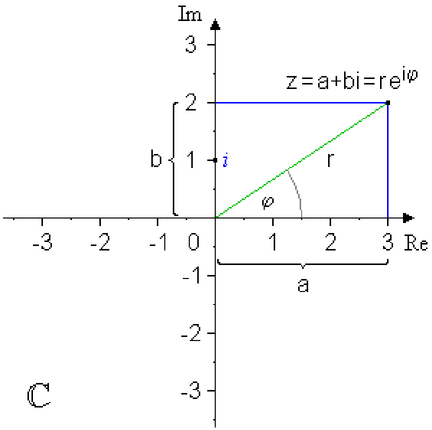


$$\begin{aligned} z_1 &= a + \mathrm{i}b \\ z_2 &= x + \mathrm{i}y \\ \Rightarrow z_1 + z_2 &= (a + x) + \mathrm{i}(b + y) \end{aligned}$$

Die Ebene der komplexen Zahlen wird auch komplexe Ebene oder Gaußsche Zahlenebene genannt.

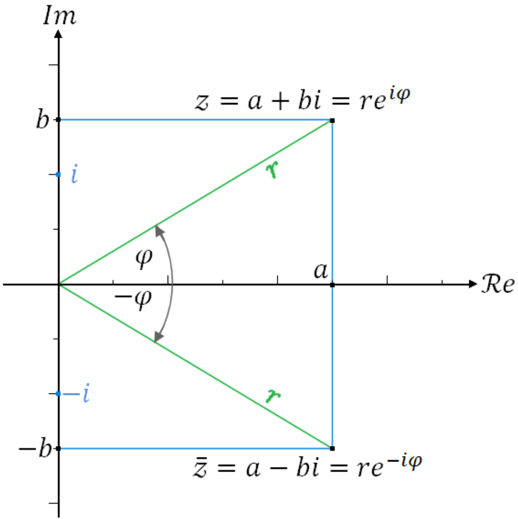
Polarkoordinaten

Punkte in der Ebene können wir auch durch Polarkoordinaten beschreiben, d.h. durch die Länge $r \geq 0$ eines Ortsvektors und seinen Winkel φ mit der x-Achse.



$$
\begin{aligned}
z &= a + \mathrm{i}b \\
r &= |z| \in \mathbb{R} \\
\varphi &= \arg(z) \\
\Rightarrow z &= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\
&= r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}
\end{aligned}
$$

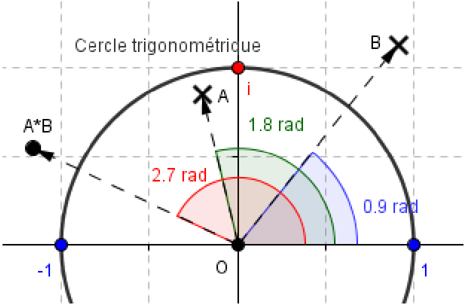
Komplexe Konjugation



$$
\begin{aligned}
z &= a + \mathrm{i}b \\
&= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\
\Rightarrow \bar{z} &= a - \mathrm{i}b \\
&= r \cdot (\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))
\end{aligned}
$$

Multiplikation komplexer Zahlen

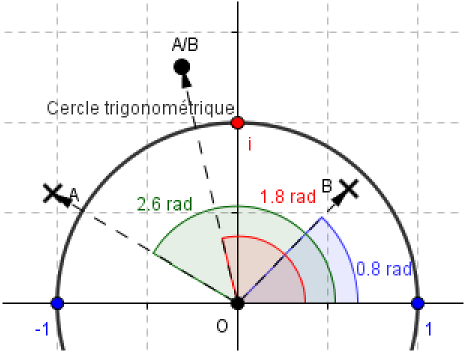
Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 entspricht dem Addieren der Winkel und dem Multiplizieren der Beträge.



$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \\
z_2 &= r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\
\Rightarrow z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \\
&\qquad \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))
\end{aligned}
$$

Division komplexer Zahlen

Die Division zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 entspricht der Differenz der Winkel und der Division der Beträge.



$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \\
z_2 &= r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\
\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\
&\qquad \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}
$$

Potenzieren komplexer Zahlen

Aus der n-fachen Anwendung der Multiplikation ergibt sich

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ \Rightarrow z^n &= r^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

Beispiel 1.39

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \mathrm{i}^{2015} &= \cos(2015\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(2015\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi \\ &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Wurzeln komplexer Zahlen

Aus Multiplikation und Division erschließt sich leicht, wie man Wurzeln in $\mathbb{C}$ zieht.

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ \Rightarrow \sqrt{z} &= \sqrt{r} \cdot (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}) \end{aligned}$$

Beispiel 1.40

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{\mathrm{i}} &= \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

Probe:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^2 &= \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2\\ &= \frac{1}{2}((1\cdot 1-1\cdot 1)+\mathrm{i}(1\cdot 1+1\cdot 1))\\ &= \frac{1}{2}(0+\mathrm{i}2)\\ &= \mathrm{i}\end{aligned}$$

Bemerkung: Wegen $(-z)^2 = z^2$ ist auch

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$$

eine Wurzel von i.

k-te Wurzeln komplexer Zahlen

Satz 1.41

Es sei $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$*. Dann gilt für die komplexen Zahlen*

$$z_j = \sqrt[k]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi j}{k}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi j}{k}\right)\right), \quad j = 0 \ldots, k-1$$

die Gleichung $z_j^k = z$*.*

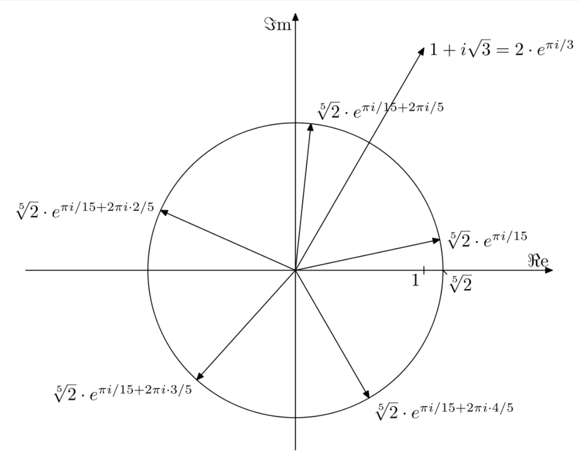
Definition 1.42

Die komplexen Zahlen z_j aus Satz 1.41 sind die k-ten Wurzeln von z.

Die k-ten Wurzeln von $z = 1$ heißen k-te Einheitswurzeln.

Beispiel 1.43

Die fünften Wurzeln von $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.



Fundamentalsatz der Algebra

Satz 1.44

Jede Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ *besitzt eine Lösung in* $\mathbb{C}$.

Zusammenfassung

- $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter, vollständiger, normierter Körper.
- $\mathbb{C}$ ist ein normierter Körper, aber kein angeordneter Körper.
- $\mathbb{C}$ ist tatsächlich auch vollständig.
- Um die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ zu begründen, bräuchten wir aber einen etwas anders definierten Vollständigkeitsbegriff, der auf sogenannten Cauchy-Folgen basiert (siehe nächstes Kapitel).
- Im Folgenden können wir alle Aussagen, die nur auf der Vollständigkeit oder Normiertheit eines Körpers beruhen, sowohl auf $\mathbb{R}$ als auch auf $\mathbb{C}$ anwenden.