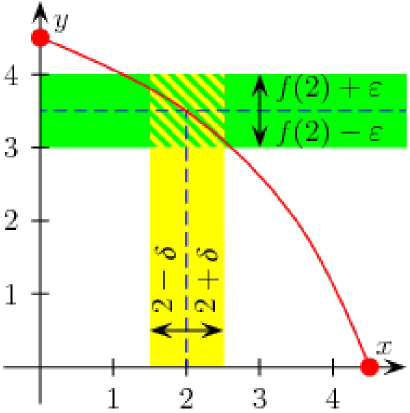
Kapitel 4

Stetigkeit



Inhalt

Kontinuierliche Veränderung

- Anschauliche Vorstellung der Stetigkeit: kontinuierliche Veränderung (also keine sprunghafte Veränderung)
- Wenn sich x "wenig" ändert, dann ändert sich auch $f(x)$ nur "wenig".
- Aber was heißt wenig? Dies müssen wir präzisieren.
- Für die Präzisierung werden wir wieder Grenzwerte nutzen.

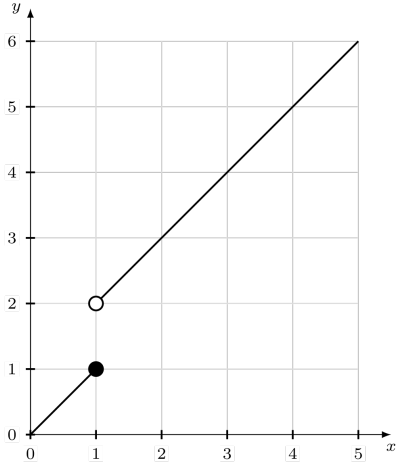
Sichtweisen der Stetigkeit (1)

Eine Funktion soll stetig heißen,

- wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments
- zu beliebig kleinen Änderungen des Funktionswertes führen.

Andere mögliche Sichtweise:

- Egal wie wir uns mit dem Argument einem Wert x_0 nähern,
- die Funktionswerte nähern sich dann stets $f(x_0)$.



nicht stetige Funktion

Sichtweisen der Stetigkeit (2)

Jede dieser beiden Sichtweisen könnte die Basis für die Definition der Stetigkeit sein.

- Wir entscheiden uns zunächst für die zweite Sichtweise.
  - ☞ Stetigkeit wird definiert mit Hilfe von Grenzwerten konvergenter Folgen.
- Im Anschluss präsentieren wir eine Aussage für die erste Sichtweise,
  - ☞ ϵ-δ-Kriterium

  und zeigen natürlich auch die Äquivalenz der beiden Konzepte.

Stetigkeit reellwertiger Funktionen

Definition 4.1

Es seien $d \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^d, x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

Wir sagen f ist stetig in x_0, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D oder einfach nur stetig, wenn f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Diskussion der Stetigkeitsdefinition

- Stetigkeit wird hier definiert mittels einer Allquantifizierung über einer Menge konvergenter Folgen. Dies macht den direkten Beweis der Stetigkeit u. U. sehr kompliziert.
- Dafür können wir leicht zeigen, dass eine Funktion f in x_0 nicht stetig ist. Hierzu müssen wir nur eine Folge (x_n) finden mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

- Ist f stetig in x_0, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

  Wir dürfen also Funktionsanwendung und Grenzwertbildung vertauschen.

- Beachten Sie, dass wir Stetigkeit nicht nur für Funktionen mit einem Argument definiert haben.
- Zur Erinnerung: Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann gegen

$$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(d)}) \in \mathbb{R}^d,$$

wenn für jede Komponentenfolge $(x_n^{(i)})$ mit $i = 1, \ldots, d$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{(i)} = x_0^{(i)}.$$

Siehe Definition 2.42.

Beispiel einer nicht stetigen Funktion

Beispiel 4.2

Die Funktion von Folie 262 lautet

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x > 1 \\ x & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

Es sei $x_0 := 1$. Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $1 = x_0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} + 1 = 2 \neq 1 = f(1).$$

Damit haben wir gezeigt, dass f nicht stetig in $x_0 = 1$ ist.

Beispiele stetiger Funktionen

Beispiel 4.3

(i) Die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathrm{id}(x_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ &= \mathrm{id}(x_0) = \mathrm{id}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right). \end{aligned}$$

(ii) Die Betragsfunktion $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig.

Begründung: Satz 2.15 (v).

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Die Funktion

$$f \quad : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

ist wegen Satz 2.15 stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(iv) Die Funktionen

$$\mathrm{Proj}_k \quad : \quad \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_k, \dots, x_d) \mapsto x_k$$

für $k = 1, \dots, d$ sind stetig. Die Funktion Proj_k heißt Projektion auf die k-te Komponente.

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz 4.4

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

Beweis.

Aus Satz 3.42 folgt (mit $n = 0$) $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$ für $|x| \leq 1$.

Sei nun x_0 eine beliebige reelle Zahl und (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x_0. Dann ist $(x_n - x_0)$ eine Nullfolge.

Mit der oben zitierten Abschätzung folgt

$$0 \leq |\exp(x_n - x_0) - 1| \leq 2 \overbrace{|x_n - x_0|}^{\to 0}$$

und daraus

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - x_0) = 1.$$

Fortsetzung Beweis.

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x_0 + x_0) = \underbrace{\exp(x_n - x_0)}_{\to 1} \exp(x_0)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(x_0).$$

Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 4.5

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Weiterhin seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{array}{rcll} f+g & : & D \to \mathbb{R}, & x \mapsto f(x)+g(x) \\ \lambda \cdot f & : & D \to \mathbb{R}, & x \mapsto \lambda \cdot f(x) \\ f \cdot g & : & D \to \mathbb{R}, & x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

stetig in x_0. Gilt außerdem $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0, mit $D' := \{x \in D | g(x) \neq 0\}$.

Beweis.

Der Satz folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen, siehe Satz 2.15.

Folgerung 4.6

(i) *Jedes Polynom* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

(ii) *Wenn* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Polynome sind, dann ist die Funktion* $\frac{f}{g}$ *stetig auf* $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Verknüpfung stetiger Funktionen

Satz 4.7

Es seien $d \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $E \subseteq \mathbb{R}$. Weiter seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$.

Wenn f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$ ist, dann ist die Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

stetig in x_0.

Zur Erinnerung:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Beweis.

Zu zeigen: Für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)).$$

- Sei also (x_n) eine beliebige konvergente Folge mit Grenzwert x_0.
- Da f stetig ist folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
- Damit ist $(f(x_n))$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $f(x_0)$.
- Weil g in $f(x_0)$ stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$.

Verknüpfungsbeispiele

Beispiel 4.8

- Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist auch

$$\begin{aligned} |f| \quad : \quad & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

  stetig.

  Begründung: $|f| = \text{abs} \circ f$ und die Funktion abs ist stetig, siehe Folie 268.
- Die Funktionen $g(x) := \exp(x)$ und $f(x) := -x^2$ sind stetig, also ist auch $g(f(x)) = \exp(-x^2)$ stetig.

ϵ-δ-Kriterium

Satz 4.9

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) *f ist stetig in x_0.*

(ii) *Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ gilt:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Bemerkung: Bedingung (ii) aus Satz 4.9 lautet in Quantorenschreibweise

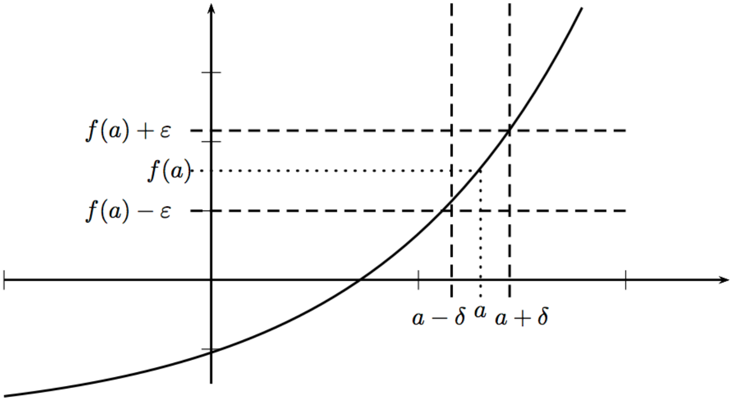
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Diskussion ϵ-δ-Kriterium

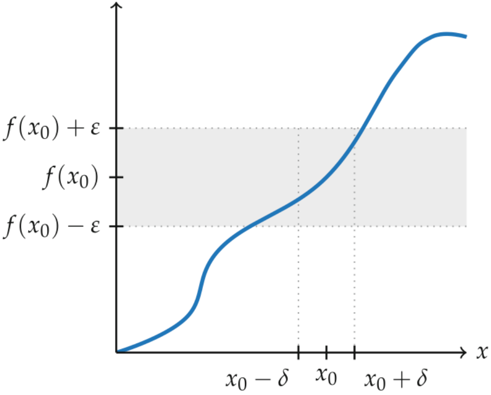
- Das ϵ-δ-Kriterium entspricht der anderen Sichtweise der Stetigkeit:
  Hinreichend kleine Änderungen des Arguments führen zu beliebig kleinen Änderungen in den Funktionswerten.
- Negation der Bedingung:

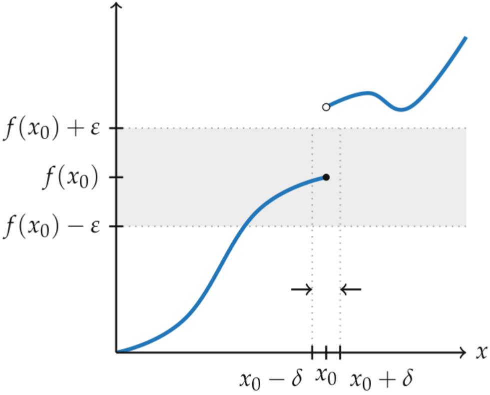
$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Veranschaulichung des ϵ-δ-Kriteriums



Stetig und nicht stetig mit dem ϵ-δ-Kriterium





Beweis für (ii) $\Rightarrow$ (i).

Es gilt (ii), also das ϵ-δ-Kriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt, also:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

- Wir wählen ein $\delta > 0$ gemäß Voraussetzung.
- Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$.
- Nach Voraussetzung (mit $x = x_n$) folgt dann mit diesem n_0:

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Beweis für (i) $\Rightarrow$ (ii)

Es gilt (i), also:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Ann.: (ii) gilt nicht.

- Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.
- Wir wählen ein solches ϵ und wenden es für $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ an.
- Wir erhalten für jedes n ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$.
- Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, eventuell existiert der Grenzwert auch gar nicht.
- Widerspruch!

Beispiele für die Arbeit mit dem ϵ-δ-Kriterium

Beispiel 4.10

- Wir zeigen, dass $f(x) = x$ stetig in einem beliebigen x_0 ist.

  Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta = \epsilon$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

- Wir zeigen, dass die Funktion von Folie 262 in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

  Wähle $\epsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = 1 + \frac{\delta}{2}$. Für dieses x gilt $|x - x_0| < \delta$ und weiterhin:

$$|f(x) - f(1)| = |1 + \frac{\delta}{2} + 1 - 1| = |1 + \frac{\delta}{2}| \geq 1 = \epsilon.$$

Berührungspunkt

Definition 4.11

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^d$ heißt Berührungspunkt von D, wenn es eine Folge (a_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.

Beispiel 4.12

Für ein offenes Intervall $(b, c) \subseteq \mathbb{R}$ ist jedes $a \in [b, c]$ ein Berührungspunkt, also auch die Intervallgrenzen.

Beispielfolgen für die linke und rechte Intervallgrenze:

$$a_n = b + \frac{1}{n} \quad \text{bzw.} \quad a_n = c - \frac{1}{n}.$$

Grenzwerte bei Funktionen

Definition 4.13

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^d, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^d$ ein Berührungspunkt von D und $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(i) Gilt für alle Folgen (x_n) in D

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

so schreiben wir dafür

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

und bezeichnen dies als den Grenzwert von f für x gegen a.

Fortsetzung Definition.

(ii) Nur für $d = 1$: Gilt für alle Folge (x_n) in D mit $x_n > a$ für alle n (bzw. $x_n < a$ für alle n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b,$$

dann schreiben wir

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = b, \quad \left(\text{bzw. } \lim_{x\nearrow a} f(x) = b\right).$$

und bezeichnen dies als den rechtsseitigen Grenzwert bzw. linksseitigen Grenzwert von f für x gegen a.

Fortsetzung Definition.

(iii) Nur für $d = 1$: Gilt für jede Folge (x_n) in D

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b,$$

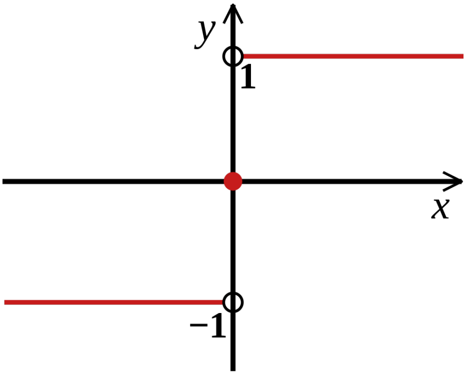
dann schreiben wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \quad \left(\text{bzw. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right).$$

und bezeichnen dies als den Grenzwert von f für x gegen ∞ bzw. $-\infty$.

Signum-Funktion

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Beispiele für Funktionsgrenzwerte

Beispiel 4.14

Funktion	linksseitiger G.	rechtsseitiger G.	Grenzwert
$\operatorname{sgn}(x)$	$\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$	existiert nicht
$\frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$	existiert nicht
$\frac{1}{\lvert x \rvert}$	$\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{\lvert x \rvert} = \infty$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{\lvert x \rvert} = \infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\lvert x \rvert} = \infty$

Lemma zu Grenzwerten

Lemma 4.15

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a.$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a.$

Der Grenzwert von f für x gegen x_0 existiert also genau dann, wenn

- links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und
- diese Grenzwerte identisch sind.

Stetige Fortsetzung

Definition 4.16

Es seien $d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \notin D$ ein Berührungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Wir sagen f ist stetig fortsetzbar in x_0, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Die Funktion $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ b & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

heißt stetige Fortsetzung von f in x_0.

Beispiel einer stetigen Fortsetzung

Beispiel 4.17

Es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Beweis: Wegen

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$$

ist

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = h^{-1} \cdot (\exp(h) - 1) = h^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}.$$

Fortsetzung Beweis.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\exp(h)-1}{h}-1\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|h|^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^{k+1}}{(k+2)!} = |h|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^{k}}{(k+2)!} \\
&\leq |h|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^{k}}{k!} = |h|\exp(|h|).
\end{aligned}$$

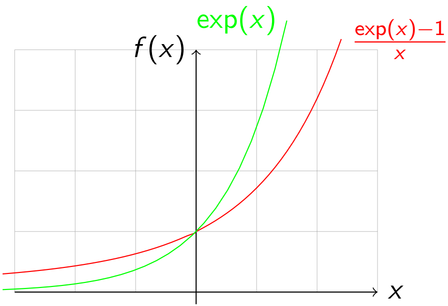
Da Absolutbetrag und Exponentialfunktion stetige Funktionen sind, folgt die Behauptung.

Folgerung 4.18

Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

ist in 0 *stetig fortsetzbar.*



Vorbereitung für den Zwischenwertsatz

Lemma 4.19

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Dann existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis.

Aus $f(a) \cdot f(b) < 0$ folgt, dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben müssen. O. B. d. A. sei $f(a) < 0 < f(b)$.

Wir konstruieren ein geeignetes x mit Hilfe einer Intervallschachtelung (siehe Satz 2.31).
Wir setzen $a_1 := a$, $b_1 := b$ und für $n \geq 2$

$$a_n := \begin{cases} a_{n-1}, & \text{falls } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Fortsetzung Beweis.

$$b_n := \begin{cases} \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, & \text{falls } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \geq 0 \\ b_{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

- $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$
- $a_n < b_n$
- $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$
- $b_n - a_n = 2^{-(n-1)}(b_1 - a_1)$ und damit $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

Nach Satz 2.31 existiert also genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus dem Beweis von Satz 2.31 wissen wir, dass dieses x der gemeinsame Grenzwert der beiden Folgen (a_n) und (b_n) ist, also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Fortsetzung Beweis.

Jetzt ist f aber stetig. Daher gilt

$$0 \geq \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0.$$

woraus $f(x) = 0$ folgt. Wegen $f(a) \cdot f(b) \neq 0$ folgt auch noch $x \neq a \wedge x \neq b$ und somit $x \in (a, b)$.

Zwischenwertsatz

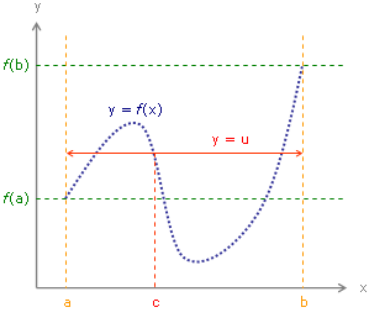
Satz 4.20

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) < f(b)$.

Dann existiert für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ *ein* $x \in [a, b]$ *mit* $f(x) = y$.

Beweis.

Wende Lemma 4.19 auf die Funktion
$g(x) := f(x) - y$ an.



Anwendung des Zwischenwertsatzes (I): Existenz von Nullstellen

Beispiel 4.21

Die Gleichung

$$x^5 + x + 1 = 0$$

hat eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Beweis:

- Die Funktion $f(x) = x^5 + x + 1$ ist stetig.
- $f(-1) = -1, f(0) = 1$
- Also folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $c \in [-1, 0]$ existiert mit $f(c) = 0$.

Wie könnte man dieses c möglichst gut approximieren?

Anwendung des Zwischenwertsatzes (II): Existenz eines Fixpunktes

Satz 4.22

Für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *gibt es ein* $c \in [0, 1]$ *mit* $f(c) = c$.

Beweis.

Wende den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) := f(x) - x$ an. $\square$

Beschränkt, Maximum, Minimum

Definition 4.23

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) f heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

(ii) f heißt nach unten beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) \geq m \text{ für alle } x \in D.$$

(iii) f heißt beschränkt, wenn es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$m \leq f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

Fortsetzung Definition.

(iv) $x_0 \in D$ heißt Maximalstelle von f, wenn für alle $x \in D$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

gilt. Man sagt dann auch, dass f in x_0 ein Maximum annimmt.

(v) $x_0 \in D$ heißt Minimalstelle von f, wenn für alle $x \in D$

$$f(x_0) \leq f(x)$$

gilt. Man sagt dann auch, dass f in x_0 ein Minimum annimmt.

(vi) $x_0 \in D$ heißt Extremstelle von f, wenn x_0 eine Maximal- oder Minimalstelle ist. Man sagt dann auch, dass f in x_0 ein Extremum annimmt.

Extremwertsatz von Weierstraß

Satz 4.24

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und hat in $[a, b]$ eine Maximal- und eine Minimalstelle.

Bemerkungen:

- Der Satz ist im Allgemeinen für

$$f : \begin{array}{l} (a, b) \to \mathbb{R} \\ [a, b) \to \mathbb{R} \\ (a, b] \to \mathbb{R} \end{array}$$

  falsch!
- Wir haben hier nur einen Spezialfall des Extremwertsatzes für Funktionen mit einer Veränderlichung formuliert.

Beweis.

O. B. d. A. zeigen wir nur die Beschränkung nach oben und die Existenz einer Maximalstelle.

Ann.: f ist nicht nach oben beschränkt.

- D. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $y_n \in f([a, b])$ mit $y_n > n$.
- Zu jedem y_n existiert ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = y_n$. Wir betrachten jetzt die Folge (x_n).
- (x_n) liegt in $[a, b]$ und ist damit beschränkt.
- Nach dem Satz von Bolzano-Weiterstraß (Satz 2.35) hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}).
- Sei $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.
- Da alle $x_{n_k} \in [a, b]$ sind, folgt $x_0 \in [a, b]$ (siehe Satz 2.22).
- Da f stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.
- Nach unserer Annahme ist $f(x_{n_k})$ aber nach oben unbeschränkt und damit nicht konvergent. Widerspruch.

Fortsetzung Beweis.

Es sei $M := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$. Wir müssen zeigen, dass $M \in f([a, b])$ ist.

- Aus der Supremumseigenschaft folgt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $y_\epsilon \in f([a, b])$ mit $M - \epsilon \leq y_\epsilon < M$.
- Wir betrachten $\epsilon = \frac{1}{n}$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) = y_{\frac{1}{n}} < M.$$

- Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.
- Die Folge (x_n) ist beschränkt und somit gibt es wieder eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}).
- Es sei $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Es gilt wieder $x_0 \in [a, b]$.
- Aus der Stetigkeit von f folgt

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Die Aussage des Extremwertsatzes lässt sich auch wie folgt formulieren.

Folgerung 4.25

Das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wieder ein abgeschlossenes Intervall.

Genauer: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, so existieren* $c, d \in \mathbb{R}, c < d$, *mit* $f([a, b]) = [c, d]$.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 4.26

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen.

(i) Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

gilt, das heißt

$$\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

(ii) Die Folge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Punktweise Konvergenz

- $\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
- Man beachte: Allquantor und Existenzquantor dürfen in der Prädikatenlogik nicht vertauscht werden.
$$\forall x \exists y P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x P(x,y)$$
In der linken Formel hängt das y von x ab, in der rechten Formel dagegen ist das y unabhängig von x.
- Bei der punktweise Konvergenz hängt das n_0 also von x ab.

Gleichmäßige Konvergenz

- $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
- Das n_0 ist hier unabhängig von x.

Äquivalente Charakterisierung der gleichmäßigen Konvergenz:

Lemma 4.27

Eine Folge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

gilt.

Beispiel einer Funktionenfolge (I)

Beispiel 4.28

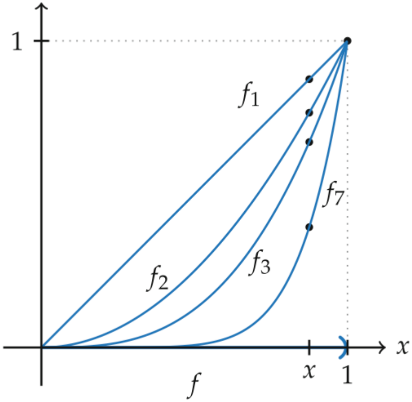
Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Für $x \in [0,1]$ gilt

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Die Folge stetiger Funktionen (f_n) konvergiert also punktweise gegen eine unstetige Funktion f.

Wir werden gleich sehen, dass damit keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen kann.

Graphen von $f_n(x) = x^n$



Beispiel einer Funktionenfolge (II)

Beispiel 4.29

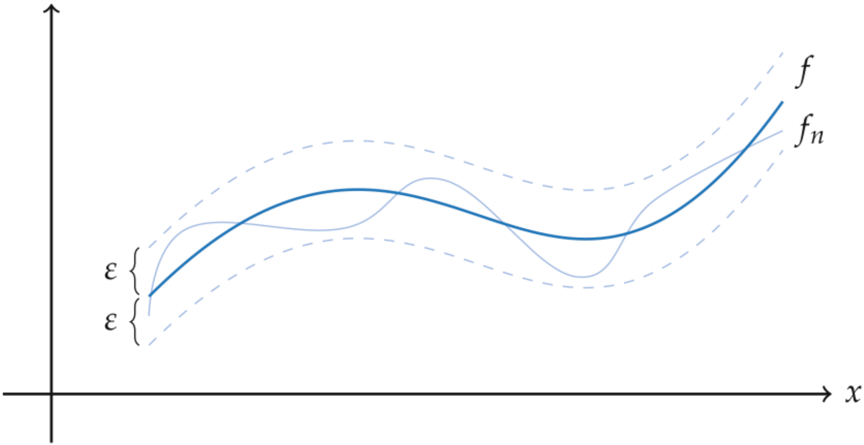
Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{n}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x.$$

Hier konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

Beweis: Für $\epsilon > 0$ wähle $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$.

Veranschaulichung der gleichmäßigen Konvergenz



Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz 4.30

Wenn eine Folge stetiger Funktionen (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist f stetig.

Beweis.

Wir zeigen die Stetigkeit der Grenzfunktion mit dem ϵ-δ-Kriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da (f_n) gleichmäßig konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle x, x' gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{und} \quad |f(x') - f_n(x')| < \epsilon.$$

Fortsetzung Beweis.

Da f_n stetig ist, existiert zu ϵ ein $\delta > 0$, so dass für alle x, x' mit $|x - x'| < \delta$ gilt:

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x') + f_n(x') - f(x')| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Stetigkeit von Potenzreihen (I)

Satz 4.31

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$.

Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} f_n : [x_0 - r, x_0 + r] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k \end{aligned}$$

für alle $0 < r < R$ *gleichmäßig gegen*

$$\begin{aligned} f : [x_0 - r, x_0 + r] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \end{aligned}$$

Beweis.

- Für $\rho < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$.
- Also ist die Folge $(a_k \rho^k)$ eine Nullfolge und damit konvergent.
- Also ist sie auch beschränkt, d. h. $|a_k \rho^k| \leq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- Für x mit $|x - x_0| \leq r$ und $r < \rho < R$ gilt also

$$\left| a_k (x - x_0)^k \right| = \left| a_k \rho^k \frac{(x - x_0)^k}{\rho^k} \right| \leq K\theta^k$$

  mit $0 < \theta := \frac{r}{\rho} < 1$.
- Die (geometrische) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} K\theta^k$ ist konvergent.

Fortsetzung Beweis.

- Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{\infty} K\theta^k < \epsilon$.
- Für alle $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ und alle $n \geq n_0$ gilt damit:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} K\theta^k \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Stetigkeit von Potenzreihen (II)

Aus Satz 4.30 und Satz 4.31 folgt, dass alle Potenzreihen im Inneren des Konvergenzradius stetig sind.

Folgerung 4.32

Es sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann ist die Funktion $P : (-R, R) \to \mathbb{R}, x \mapsto P(x)$ stetig.

Bemerkung: Damit sind insbesondere die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Stetige Fortsetzbarkeit zweier Funktionen

Lemma 4.33

Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

und

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 1.$$

Beweis.

Wir beschränken uns auf den Beweis des ersten Grenzwerts.

Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Für die Potenzreihe rechts gilt $R = \infty$. Sie konvergiert im Entwicklungspunkt 0 und nimmt dort den Wert 1 an. Da die Potenzreihe stetig ist, folgt die Behauptung.

Beweis des Identitätssatz für Potenzreihen (I)

Lemma 4.34

Es sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und* (α_k) *eine Nullfolge mit* $\alpha_k \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

Existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $k \geq k_0$

$$P(\alpha_k) = 0$$

gilt, dann folgt

$$a_n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis.

Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.

$n = 0$:

$$a_0 = P(0) = \lim_{k\to\infty} P(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

$n \to n+1$: Aus der I.V. folgt $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Es sei

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x^{n+1}} = a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \cdots .$$

Damit folgt nun

$$a_{n+1} = Q(0) = \lim_{k\to\infty} Q(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{P(\alpha_k)}{(\alpha_k)^{n+1}} = 0.$$

Beweis des Identitätssatzes für Potenzreihen (II)

Beweis von Satz 3.56

Es sei

$$h(z) := f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n.$$

N. V. gilt dann $h(z) = 0$ für alle $0 \leq |z| < \min\{R_f, R_g\} =: R$, insbesondere also $h(\alpha_k) = 0$ für

$$\alpha_k := \frac{R}{2k}.$$

Mit Lemma 4.34 folgt $(a_n - b_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Identitätssatz für Polynomfunktionen

Folgerung 4.35

Es seien

$$
\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n \\
g(z) &= b_0 + b_1 z + \cdots b_m z^m
\end{aligned}
$$

zwei Polynomfunktionen mit $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) *Für alle* $z \in \mathbb{K}$ *gilt* $f(z) = g(z)$.

(ii) $m = n$ *und* $a_k = b_k$ *für alle* $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Monotone Funktionen

Definition 4.36

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

(i) monoton wachsend, wenn für alle $x, x' \in D$ gilt

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

Wenn sogar die strikte Ungleichung $f(x) < f(x')$ folgt, dann nennen wir f streng monoton wachsend.

(ii) monoton fallend, wenn für alle $x, x' \in D$ gilt

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x').$$

Wenn sogar die strikte Ungleichung $f(x) > f(x')$ folgt, dann nennen wir f streng monoton fallend.

Existenz einer Umkehrfunktion

Satz 4.37

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit* $A := f(a)$ *und* $B := f(b)$.

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) f *bildet das Intervall* $[a, b]$ *bijektiv auf* $[A, B]$ *ab und besitzt daher eine Umkehrfunktion* f^{-1}.

(ii) *Die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [A, B] \to \mathbb{R}$ *ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis von (i).

- Aus dem Zwischenwertsatz folgt $f([a,b]) \supseteq [A,B]$.
- Für $a < x < b$ folgt wegen der strengen Monotonie $A = f(a) < f(x) < f(b) = B$ und somit $f([a,b]) \subseteq [A,B]$.
- Aus $f([a,b]) \supseteq [A,B]$ und $f([a,b]) \subseteq [A,B]$ folgt $f([a,b]) = [A,B]$. Insbesondere ist damit die Abbildung $f : [a,b] \to [A,B]$ surjektiv.
- Es sei nun $x \neq x'$. Dann gilt entweder $x < x'$ oder $x > x'$. Aus $x < x'$ folgt wegen der stregen Monotonie $f(x) < f(x')$ und damit $f(x) \neq f(x')$. Analog folgt aus $x > x'$ ebenfalls $f(x) \neq f(x')$. Also ist f injektiv.
- Wenn die Funktion $f : [a,b] \to [A,B]$ injektiv und surjektiv ist, ist sie bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$.

Beweis von (ii).

Strenge Monotonie der Umkehrfunktion

- Es seien $y, y' \in [A, B]$ mit $y < y'$. Dann existieren $x, x' \in [a, b]$ mit $f^{-1}(y) = x$ und $f^{-1}(y') = x'$. Aus der Eigenschaft der Umkehrfunktion folgt $f(x) = y$ und $f(x') = y'$.
- Ann.: $x \geq x'$. Dann würde aus der Monotonie $y = f(x) \geq f(x') = y'$ folgen. Widerspruch! Also folgt aus $y < y'$ auch $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

- Wir zeigen mit dem ϵ-δ-Kriterium, dass f^{-1} stetig in y_0 ist.
- Es sei $y_0 \in [A, B]$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir definieren:

$$x_0 := f^{-1}(y_0), x_- := x_0 - \epsilon, x_+ := x_0 + \epsilon.$$

Damit gilt $x_- < x_0 < x_+$ und wegen des streng monotonen Wachstums $y_- := f(x_-) < y_0 < f(x_+) =: y_+$.

Fortsetzung Beweis (ii).

(ii) Wähle $\delta \leq \min\{y_+ - y_0, y_0 - y_-\}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad y_- \leq y_0 - \delta \text{ und } y_+ \geq y_0 + \delta \\
&\Rightarrow \quad y_- \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_+ \text{ für alle } |y - y_0| < \delta
\end{aligned}$$

Wegen des streng monotonen Wachstums folgt damit aus $|y - y_0| < \delta$

$$x_- < f^{-1}(y) < x_+,$$

also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$.

Monotonie und Bijektivität der Exponentialfunktion

Lemma 4.38

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, bildet* $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}_+$ *ab und besitzt eine Umkehrfunktion* $\exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Beweis.

Für $x > 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x > 1.$$

Damit folgt für $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x < x'$

$$\exp(x') = \exp(x' - x + x) = \overbrace{\exp(x' - x)}^{>1} \exp(x) > \exp(x).$$

Also ist exp streng monoton wachsend.

Fortsetzung Beweis.

Wegen $\exp(x) \geq 1 + x$ gilt $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Weiterhin gilt

$$0 < \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{1+x},$$

woraus $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ folgt. Wegen $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wegen der Stetigkeit von exp folgt

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

Die Existenz der Umkehrfunktion folgt dann aus Satz 4.37 (i).

Logarithmus

Definition 4.39

Die Funktion

$$\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

sei die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Die Funktion heißt der (natürliche) Logarithmus.

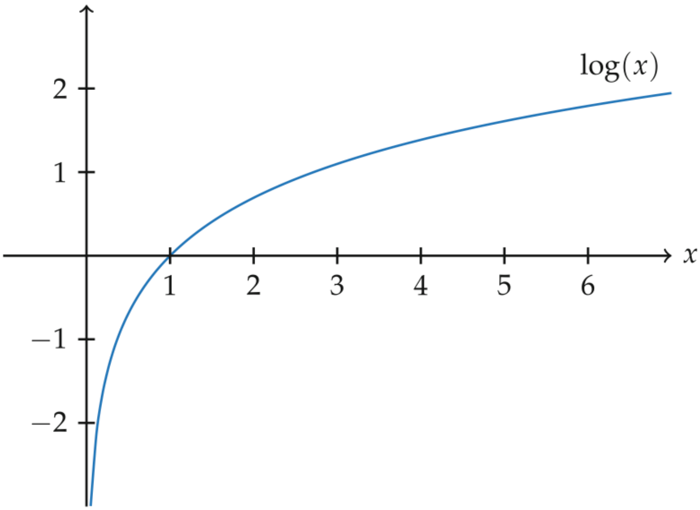
Folgerung 4.40

Die Funktion $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis.

Folgt direkt aus Satz 4.37 und Lemma 4.38.

Veranschaulichung des Logarithmus



Additionstheorem für den Logarithmus

Satz 4.41

Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Beweis.

Es seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \exp(\alpha) \quad \text{und} \quad y = \exp(\beta)$$

und damit gilt $\log(x) = \alpha$ und $\log(y) = \beta$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\log(xy) &= \log(\exp(\alpha)\exp(\beta)) \\
&= \log(\exp(\alpha + \beta)) \\
&= \alpha + \beta \\
&= \log(x) + \log(y).
\end{aligned}$$

Verallgemeinerung der Potenzen (I)

Lemma 4.42

Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ identisch sind (also $f_1(q) = f_2(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$), dann sind sie auch auf $\mathbb{R}$ identisch (also $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

Beweis.

Man mache sich folgendes klar: Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Aus der Stetigkeit von f_1 und f_2 folgt dann mit solch einer Folge (x_n):

$$f_1(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = f_2(x).$$

Verallgemeinerung der Potenzen (II)

Satz 4.43

Es sei $a > 0$. Wir definieren die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

durch

$$f_a(x) := \exp(x \cdot \log(a)).$$

Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$ die Gleichung

$$f_a(r) = a^r.$$

Beweis.

Mit vollständiger Induktion zeigen wir zunächst, dass $f_a(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$n = 1$: $f_a(1) = \exp(1 \cdot \log(a)) = \exp(\log(a)) = a$.

$n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
f_a(n+1) &= \exp((n+1) \cdot \log(a)) \\
&= \exp(n \cdot \log(a) + \log(a)) \\
&= \exp(n \cdot \log(a)) \cdot \exp(\log(a)) \\
&= f_a(n) \cdot f_a(1) \\
&= a^n \cdot a = a^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung Beweis.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f_a(-n) &= \exp(-n \cdot \log(a)) \\ &= \frac{1}{\exp(n \cdot \log(a))} \\ &= \frac{1}{f_a(n)} \\ &= \frac{1}{a^n} \\ &= a^{-n}. \end{aligned}$$

Also gilt $f_a(n) = a^n$ sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Fortsetzung Beweis.

Es sei nun $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. dann gilt:

$$\begin{aligned}
(f_a(r))^q &= (\exp(r \cdot \log(a)))^q \\
&= \exp(qr \cdot \log(a)) \\
&= \exp(p \cdot \log(a)) \\
&= f_a(p) \\
&= a^p.
\end{aligned}$$

Also ist $f_a(r) = \sqrt[q]{a^p} = a^r$.

Verallgemeinerung der Potenzen (III)

Definition 4.44

Für $a > 0$ und beliebige $x \in \mathbb{R}$ sei

$$a^x := \exp(x \cdot \log(a)).$$

Folgerung 4.45

Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Beweis.

$\mathrm{e}^x = \exp(x \cdot \log(\mathrm{e})) = \exp(x \cdot \log(\exp(1))) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$.

Potenzgesetze

Satz 4.46

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ *und alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Rechenregeln für den Logarithmus

Satz 4.47

(i) *Für alle* $a \in \mathbb{R}_+$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a).$$

(ii) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt*

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

Beweis.

Tafel ✎.

Logarithmen zu anderen Basen

Definition 4.48

Für $a \in \mathbb{R}_+$ sei $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$.

Der Wert $\log_a(x)$ heißt Logarithmus von x zur Basis a.

Also ist $\log_a(x)$ die Zahl y, die die Gleichung $a^y = x$ löst.

Einen Logarithmus von x zur Basis a können wir stets mit dem natürlichen Logarithmus ausdrücken.

Lemma 4.49

Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Wichtige Grenzwerte

Satz 4.50

(i) *Für alle $a > 0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(ii) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Polynomfunktion.

(iii)

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$$

Fortsetzung Satz.

(iv) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0.$$

Der Logarithmus wächst also langsamer als jede Polynomfunktion.

(v) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0.$$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\log(a)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(a)\right) \quad \text{weil } \exp \text{ stetig} \\
&= \exp(0) = 1.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

(ii) Für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Daraus folgt

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)!} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty.$$

Die zweite Aussage folgt durch Invertieren.

Fortsetzung Beweis.

(iii)
- Aus der stregen Monotonie der Funktion $\log(x)$ folgt für beliebige $x, S \in \mathbb{R}_+$ mit $x > e^S$ die Ungleichung $\log(x) > S$.
- Also wächst der Logarithmus über jede Schranke hinaus, d. h.

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty.$$

- Betrachten wir weiter

$$\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\lim_{x\searrow 0} \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

und setzen $y := \frac{1}{x}$.
- Dann ist $x \searrow 0$ äquivalent zu $y \to \infty$. Also gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\lim_{y\to\infty} \log(y) = -\infty.$$

Fortsetzung Beweis.

(iv) Wegen (iii) ist $x \to \infty$ äquivalent zu $y \to \infty$ mit $y = \alpha \log(x)$. Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\exp(\alpha \log(x))} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\alpha} \frac{1}{\exp(y)} \overset{\text{(ii)}}{=} 0.$$

Aus

$$x^\alpha \log(x) = \frac{-\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

ergibt sich die zweite Behauptung.

Fortsetzung Beweis.

(v) Folgt aus (iv), da

$$0 \leq x^{-\alpha} \leq \frac{\log(x)}{x^\alpha}$$

für alle $x \geq \mathrm{e}$ und

$$0 \leq x^\alpha \leq -x^\alpha \log(x)$$

für alle $0 \leq x \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$ gilt.

Alternative Darstellung der Exponentialfunktion

Satz 4.51

Es gilt

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Bemerkung:

- Mit diesem Satz haben wir eine weitere Möglichkeit, $\exp(x)$ näherungsweise zu bestimmen.
- Allerdings konvergieren die Partialsummen der Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ deutlich schneller als die oben angegebene Folge.

Vektorraum der stetigen Funktionen

Definition 4.52

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$.

Mit $\mathcal{C}(D)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen, also

$$\mathcal{C}(D) = \{f | f : D \to \mathbb{R}\}.$$

Satz 4.53

$\mathcal{C}(D)$ bildet mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x)\end{aligned}$$

(für alle $f, g \in \mathcal{C}(D)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$) einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Zusammenfassung

- Stetigkeit mittels Konvergenz von Folgen: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für alle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
- Stetigkeit als beliebige kleine Funktionsänderung bei hinreichend kleiner Argumentsänderung: ϵ-δ-Kriterium
- Funktionsgrenzwerte und stetige Fortsetzung
- Zwischenwertsatz
- Extremwertsatz von Weierstraß
- gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenfolgen und Stetigkeit von Potenzreihen
- Stetigkeit der Umkehrfunktion und Definition des Logarithmus
- $\exp(x)$ wächst schneller als jedes Polynom, $\log(x)$ wächst langsamer als jedes Polynom.