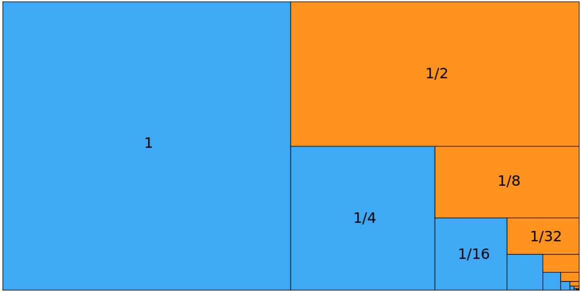
Kapitel 3

Reihen,
Potenzreihen
und
elementare Funktionen



Inhalt

Reihe als Folge der Partialsummen

Definition 3.1

Es sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{K}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Reihe und S_n ist die n-te Partialsumme der Reihe. Wir schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

für die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unabhängig davon, ob die Folge konvergiert oder nicht.

Konvergenz von Reihen

Definition 3.2

Eine Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

heißt konvergent, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert. Andernfalls heißt die Reihe divergent.

Wenn die Reihe konvergent ist, dann wird auch der Grenzwert der Reihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Ist die Reihe divergent, wird dem Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ keine Zahl zugeordnet.

- Das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kann also eine Doppelbedeutung haben.
- Es bezeichnet immer die Folge der Partialsummen, im Konvergenzfall zusätzlich auch den Grenzwert der Folge der Partialsummen.

Nullfolge ist notwendig für Konvergenz einer Reihe

Lemma 3.3

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist die Folge (a_n) eine Nullfolge.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} &\Rightarrow (S_n) \text{ ist konvergent} \\
&\Rightarrow (S_n) \text{ ist Cauchy-Folge} \\
&\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |S_m - S_n| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

$$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 + 1.$$

Geometrische Reihe

Es sei $q \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

heißt geometrische Reihe. Für $|q| \geq 1$ ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, die geometrische Reihe also divergent. Für $|q| < 1$ gilt jedoch

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Daraus folgt für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Harmonische Reihe

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

heißt harmonische Reihe. Diese Reihe ist divergent, obwohl $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist.

Für den Beweis der Divergenz zeigen wir, dass (S_n) keine Cauchy-Folge ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Und noch ein Beispiel

Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wegen $\frac{1}{n^2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge (S_n) monoton wachsend. Die Folge (S_n) ist aber auch beschränkt, denn

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Also ist (S_n) monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent.

Teleskopsumme und -reihe

Für eine Folge (a_n) ist

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$$

eine Teleskopsumme. Solche Summen lassen sich leicht auswerten:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Eine Reihe, deren Partialsummen Teleskopsummen sind, heißt Teleskopreihe. Eine Teleskopreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$

ist genau dann konvergent, wenn (a_n) konvergent ist (mit Grenzwert a). Der Grenzwert der Teleskopreihe ist dann $a_1 - a$.

Linearkombination konvergenter Reihen

Lemma 3.4

Wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ *sind und* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *ist, dann ist auch die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis.

Folgt durch Anwendung der Grenzwertregeln für Folgen auf die Folgen der Partialsummen.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k), \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad U_n := \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n + \mu U_n) \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n + \mu \lim_{n\to\infty} U_n \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.5

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ist konvergent, denn für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=0}^{n} 3\left(\frac{1}{4}\right)^k + 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= 3\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\to \frac{1}{1-\frac{1}{4}}} + 2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k}_{\to \frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\cdot\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{3}{2} = 7.$$

Leibniz-Kriterium

Satz 3.6

Wenn (a_n) eine monotone Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Beispiel 3.7

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, denn $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Beweis des Leibnizkriteriums.

O.B.d.A. sei (a_n) monoton fallend. Da (a_n) außerdem eine Nullfolge ist, folgt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k.$$

Wir werden zeigen, dass die Teilfolgen (S_{2n}) und (S_{2n+1}) konvergent sind und gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Weil (a_n) monoton fallend ist, folgt

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad \text{und} \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Teilfolge (S_{2n}) monoton fallend und (S_{2n+1}) monoton steigend. Weiterhin gilt

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0.$$

Fortsetzung Beweis.

Damit folgt

$$S_2 \geq S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq S_1.$$

Somit sind beide Folgen auch beschränkt und damit konvergent. Es sei

$$s := \lim_{n\to\infty} S_{2n} \text{ und } s' := \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} s - s' &= \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $s = s'$.

Fortsetzung Beweis.

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass aus der Konvergenz von (S_{2n}) und (S_{2n+1}) gegen den gleichen Grenzwert auch die Konvergenz von (S_n) folgt.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aus der Konvergenz von (S_{2n}) und (S_{2n+1}) gegen s folgt die Existenz von $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1 &: |S_{2n} - s| < \epsilon \\ \forall n \geq n_2 &: |S_{2n+1} - s| < \epsilon. \end{aligned}$$

Da jedes $n \in \mathbb{N}$ entweder in der Folge $(2n)$ oder in der Folge $(2n+1)$ enthalten ist, folgt für alle $n \geq n_0 := \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, dass $|S_n - s| < \epsilon$ gilt.

Absolute Konvergenz

Definition 3.8

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergent ist.

Beispiel 3.9

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ ist zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Dreiecksungleichung für absolut konvergente Reihen

Satz 3.10

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent und für die Grenzwerte gilt die Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ ist konvergent} \\
\Rightarrow \quad & S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| \text{ ist eine Cauchy-Folge} \\
\Rightarrow \quad & \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 : |S_m - S_n| < \epsilon \\
\Rightarrow \quad & \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon.
\end{aligned}
$$

Also ist auch $T_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Aus der Dreiecksungleichung folgt auch $|T_n| \leq S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit Satz 2.15 (v) und Satz 2.22

$$
\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = \lim_{n \to \infty} |T_n| \leq \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.
$$

Beispiel 3.11

- Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

  mit

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl ist,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Da diese Reihe absolut konvergent ist, ist sie auch konvergent.
- Den zugehörigen Grenzwert kennen wir für diese Reihe aber nicht.

Majoranten- und Minorantenkriterium

Satz 3.12

Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent ist, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ divergent.*

- Aussage (i) ist das sogenannte Majorantenkriterium und
- Aussage (ii) das Minorantenkriterium.
- Die beiden Aussagen sind semantisch äquivalent.

Beweis.

Es seien

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad \text{und} \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

und $\epsilon > 0$ beliebig. N.V. ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Damit ist (T_n) ist eine Cauchy-Folge und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq n \geq n_0$

$$|T_m - T_n| = \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| < \epsilon$$

gilt. Wegen $|a_k| \leq |b_k|$ folgt

$$|S_m - S_n| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| < \epsilon.$$

Also ist auch (S_n) eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Beispiel 3.13

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{4^n}$$

ist absolut konvergent.

Begründung:

$$\left|\frac{3^n + (-2)^n}{4^n}\right| \leq \frac{3^n + 2^n}{4^n} \leq \frac{3^n + 3^n}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{=4} = 8$$

ist absolut konvergent (geometrische Reihe).

Beispiel 3.14

Die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

sind für $k \geq 2$ absolut konvergent.

Begründung:

- Für $k \geq 2$ und $n \geq 1$ gilt $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$.
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent (siehe Folie 172) und wegen $\frac{1}{n^2} > 0$ auch absolut konvergent.
- Also können wir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als Majorante nutzen und
- mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ absolut konvergent ist.

Quotientenkriterium

Satz 3.15

Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiterhin gebe es eine Zahl $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta$$

erfüllt ist.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis.

Beweisidee: Wir nutzen die geometrische Reihe als Majorante.

N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_{n+1}| \leq \theta |a_n|$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq \theta |a_{n-1}| \leq \theta^2 |a_{n-2}| \leq \cdots \leq \theta^{n-n_0} |a_{n_0}|.$$

Es folgt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{n} |a_k| = |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| \\ &\leq |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \sum_{k=n_0}^{n} \theta^{k-n_0} \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

$$= \quad |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{n-n_0} \theta^k}_{\text{absolut konvergent}}$$

Es sei

$$b_k := \begin{cases} |a_k| & \text{für } k < n_0 \\ |a_{n_0}|\theta^{k-n_0} & \text{für } k \geq n_0 \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium absolut.

Beispiel 3.16

Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

mit dem Quotientenkriterium auf (absolute) Konvergenz. Es ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Für $n \geq 3$ gilt dann

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1.$$

Mit $\theta = \frac{8}{9}$ ist das Quotientenkriterium erfüllt. Also ist die Reihe absolut konvergent.

Beispiel 3.17

Wir betrachten wieder die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Wir wissen, dass die Reihe divergiert. Für den Quotienten gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Wegen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

gibt es aber kein θ und kein n_0, so dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta < 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Wir sehen daran, dass die Bedingung $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta < 1$ wesentlich ist. Nur $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ reicht nicht aus.

Beispiel 3.18

Wie wir von Folie 172 wissen, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (absolut). Aber auch für diese Reihe gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

Damit existiert auch hier kein θ wie im Quotientenkriterium gefordert.

Dies zeigt, dass das Quotientenkriterium nur hinreichend aber nicht notwendig für absolute Konvergenz ist.

Folgerung 3.19

Existiert der Grenzwert

$$\theta := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

dann gilt:

(i) *Für* $\theta < 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Für* $\theta > 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

(iii) *Für* $\theta = 1$ *ist keine Aussage über Konvergenz möglich.*

Wurzelkriterium

Satz 3.20

Es sei (a_n) *eine Folge in* $\mathbb{K}$. *Weiterhin gebe es eine Zahl* $\theta \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < \theta < 1$, *so dass für alle* $n \geq n_0$ *die Ungleichung*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$$

erfüllt ist.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

Beweis.

Die Bedingung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ ist äquivalent zu $|a_n| \leq \theta^n$. Damit können wir ab n_0 die geometrische Reihe als Majorante nutzen.

Lemma 3.21

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Beweis.

Setze $b_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Wir zeigen, dass (b_n) eine Nullfolge ist.

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2$$

"$\geq$" ergibt sich durch die binomische Formel und weglassen der Summanden, ausgenommen für $k = 0$ und $k = 2$. Es folgt

$$b_n^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0.$$

Beispiel 3.22

Wir untersuchen die absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1.$$

Für festes $k \geq 2$ folgt damit

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^k \longrightarrow 1.$$

Wir sehen, dass auch das Wurzelkriterium nur ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kriterium für absolute Konvergenz ist.

Folgerung 3.23

Existiert der Grenzwert

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

dann gilt:

(i) *Für* $\theta < 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Für* $\theta > 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

(iii) *Für* $\theta = 1$ *ist keine Aussage über Konvergenz möglich.*

Cauchy-Produkt

Definition 3.24

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1}\right)$$

das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bemerkung: Wenn die Reihen mit $n = 0$ beginnen, dann lautet das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) .$$

Cauchy-Produkt und das Produkt von Reihen

Satz 3.25

Wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, dann ist auch deren Cauchy-Produkt absolut konvergent und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \right)
\end{aligned}$$

Potenzreihe

Definition 3.26

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

Potenzreihe in der Variablen x mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizientenfolge (a_n).

- Für $x = x_0$ und $n = 0$ erhalten wir 0^0.
- Es gilt $0^0 = 1$. Also ist $(x-x_0)^0$ bei Potenzreihen immer 1.

Potenzreihen als Funktion

Wir interessieren uns zunächst für die Werte $x \in \mathbb{K}$, für welche die Potenzreihe

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

konvergiert. Es sei

$$D := \{x \in \mathbb{K} | P(x) ist \text{ konvergent}\}$$

die Menge dieser Werte. Dann können wir eine Potenzreihe als Funktion

$$\begin{aligned} P \quad : \quad & D \to \mathbb{K} \\ & x \mapsto P(x) \end{aligned}$$

auffassen. Wir werden sehen, dass wir viele wichtige Funktionen durch Potenzreihen ausdrücken können.

Beispiel 3.27

Wir betrachten die Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

in $\mathbb{C}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ (geometrische Reihe).

Wir wissen, dass die Reihe für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert, also $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Wir kennen sogar die Funktion, die von dieser Potenzreihe dargestellt wird. Es gilt nämlich

$$P(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Beispiel 3.28

Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir

$$\left| \frac{(n+2) z^{n+1}}{(n+1) z^n} \right| = \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\to 1} |z| \longrightarrow |z|.$$

Hieraus folgt, dass auch diese Potenzreihe für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert.

Beispiel 3.29

Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-1)^n$$

konvergieren ensprechend der beiden vorangegangenen Beispielen für $|z-1| < 1$ und sind divergent für $|z-1| > 1$.

Beispiel 3.30

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Für den Beweis nutzen wir das Cauchy-Produkt.

Beweis für die Formel.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} z^j z^{k-j}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} z^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k.
\end{aligned}
$$

Konvergenzradius (1)

Es ist kein Zufall, dass die Mengen $D = \{z \in \mathbb{C} | P(z) \text{ ist konvergent}\}$ in den vorangegangenen Beispielen alle kreisförmig sind.

Lemma 3.31

Konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

in einem Punkt $x_1 \neq x_0$, dann konvergiert die sie auch in jedem Punkt $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ absolut.

Beweis.

- Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n(x_1 - x_0)^n)$ eine Nullfolge und damit konvergent.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt. Also existiert ein $M > 0$ mit

$$|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung Beweis.

- Für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
|a_n(x - x_0)^n| &= \left| a_n(x_1 - x_0)^n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \right| \\
&= |a_n(x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \right| \\
&\leq Mq^n
\end{aligned}
$$

  mit $q := \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} < 1$.
- Damit können wir die geometrische Reihe als Majorante nutzen.
- Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolut konvergent ist für $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Konvergenzradius (2)

Folgerung 3.32

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe. Dann liegt genau einer der folgenden Fälle vor:*

(i) *Die Potenzreihe konvergiert für alle* $x \in \mathbb{K}$ *absolut.*

(ii) *Die Potenzreihe divergiert für alle* $x \in \mathbb{K} \setminus \{x_0\}$.

(iii) *Es existiert genau ein* $R \in \mathbb{R}_+$, *so dass die Potenzreihe für alle* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $|x - x_0| < R$ *absolut konvergiert und für* $|x - x_0| > R$ *divergiert.*

Definition 3.33

Die Zahl R in Fall (iii) der vorstehenden Folgerung heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Liegt Fall (i) vor, dann sagen wir, dass der Konvergenzradius Unendlich ist ($R = \infty$), im Fall (ii) ist der Konvergenzradius Null ($R = 0$).

Beispiel 3.34

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + 7n + 12)z^n$$

hat den Konvergenzradius $R = 1$.

Dies zeigen wir mit dem Quotientenkriterium. Tafel ✎

Man kann sogar den Grenzwert für diese/solche Reihen exakt bestimmen. Dies machen Sie in den ACAT-Übungen.

Beispiel 3.35

Für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n$$

gilt $R = 2$.

Diesmal mit dem Wurzelkriterium begründet:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n+2}{2^n} z^n \right|} = \frac{|z|}{2} \underbrace{\sqrt[n]{n+2}}_{\to 1} \longrightarrow \frac{|z|}{2}$$

Dabei zeigt man $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$ leicht mit dem Schachtelungsprinzip.

Beispiel 3.36

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n} z^n$$

hat den Konvergenzradius $R = 0$.

Das Quotienkriterium liefert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{1000^{n+1}} \cdot \frac{1000^n}{n! z^n} \right| = \frac{n+1}{1000} |z| \longrightarrow \infty.$$

Exponentialfunktion (1)

Satz 3.37

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut ($R = \infty$).

Beweis.

Mit dem Quotienkriterium ergibt sich für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Exponentialfunktion (2)

Definition 3.38

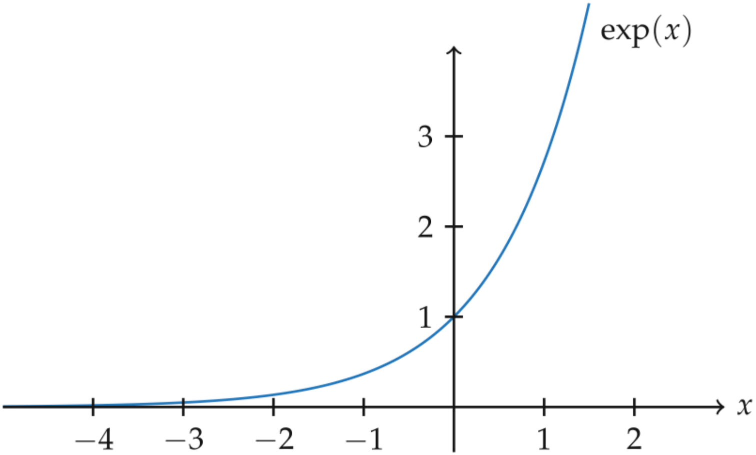
Die durch

$$\begin{aligned} \exp \quad : \quad & \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ & z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

definierte Funktion heißt (komplexe oder reelle) Exponentialfunktion.

Bei Funktionen oder Potenzreihen im Reellen schreiben wir meist x statt z (und x_0 statt z_0).

Exponentialfunktion (3)



Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Satz 3.39

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis.

Wir nutzen das Cauchy-Produkt:

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Eulersche Zahl

Definition 3.40

Die Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

heißt Eulersche Zahl.

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Satz 3.41

Es gilt:

(i) $\exp(0) = 1$,

(ii) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(iii) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(iv) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(v) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

(vi) $\exp(r) = e^r$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$.

Beweis.

(i) Einsetzen: $0^0 = 1$, $0! = 1$ und $0^n = 0$ für $n \geq 1$.

Fortsetzung Beweis.

(ii) Ann.: Es existiert $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Dann gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z) = 0 \cdot \exp(-z) = 0.$$

Widerspruch!

(iii) Folgt aus $1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$.

(iv) Betrachte zunächst die Partialsummen:

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$$

Weiterhin folgt mit Lemma 2.40: Wenn eine komplexe Folge (z_n) gegen z konvergiert, dann konvergiert die Folge $(\overline{z_n})$ gegen $\overline{z}$. Damit folgt die Aussage.

Fortsetzung Beweis.

(v) Für $x \geq 0$ gilt $\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 > 0$.
Wegen (iii) gilt die Aussage auch für $x < 0$.

(vi) $r = 0$: (i)
$r > 0$: Dann gilt $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und

$$(\exp(r))^q = \exp(r \cdot q) = \exp(p) = (\exp(1))^p = e^p.$$

Also: $\exp(r) = \sqrt[q]{e^p}$.
$r < 0$: Mit (iii) und Potenzregeln folgt

$$\exp(r) = \frac{1}{\exp(-r)} = \frac{1}{e^{-r}} = e^r.$$

Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion

Satz 3.42

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| \leq 1 + \frac{n}{2}$

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die Eulersche Zahl ist irrational

Folgerung 3.43

Die Eulersche Zahl e *ist irrational.*

Sinus und Kosinus (1)

Satz 3.44

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\exp(ix)| = 1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|\exp(ix)|^2 &= \exp(ix)\overline{\exp(ix)} \\
&= \exp(ix)\exp(\overline{ix}) \\
&= \exp(ix)\exp(-ix) \\
&= \exp(ix - ix) \\
&= \exp(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sinus und Kosinus (2)

Definition 3.45

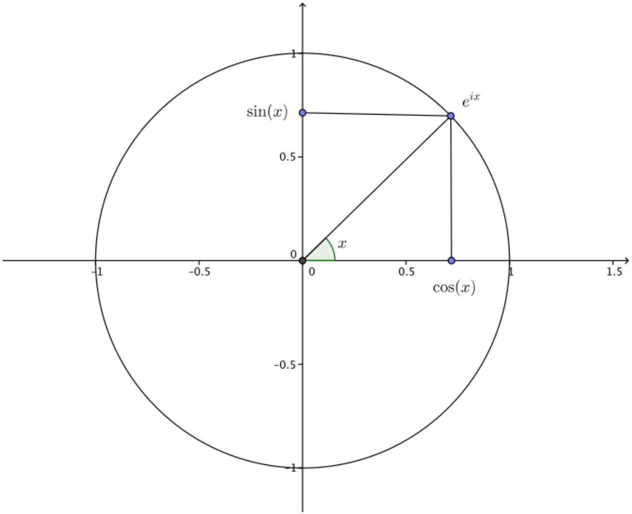
Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) \\ \cos(x) &= \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}x)). \end{aligned}$$

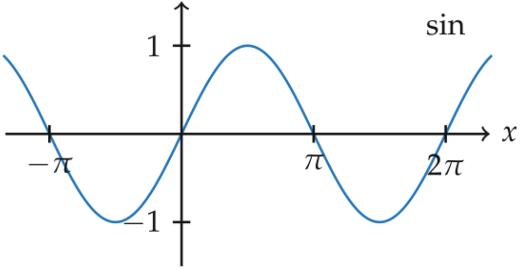
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt also die Eulersche Formel

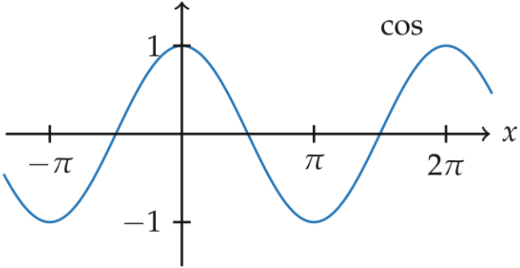
$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x).$$

Sinus und Cosinus für $x \in \mathbb{R}$ (1)



Sinus und Cosinus für $x \in \mathbb{R}$ (2)





Potenzreihendarstellung von Sinus und Cosinus (1)

Lemma 3.46

Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis.

Quotienkriterium für die erste Reihe: Sie $z \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n z^{2n+1}} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 0$$

Potenzreihendarstellung von Sinus und Cosinus (2)

Lemma 3.47

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

Beweis.

Für gerade $n \in \mathbb{N}$ können wir $n = 2m$ schreiben, für ungerade $n = 2m + 1$. Wegen der Konvergenz der betreffenden Reihen gilt

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Wegen $\mathrm{i}^{2m} = (\mathrm{i}^2)^m = (-1)^m$ ergibt sich

$$\exp(\mathrm{i}x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Also

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x)) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ \mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \end{aligned}$$

Potenzreihendarstellung von Sinus und Cosinus (3)

Da die Potenzreihen im vorangegangenen Lemma für alle komplexen Zahlen konvergieren, können wir dies nutzen, um die Definitionen von Sinus und Cosinus auf die komplexe Ebene fortzusetzen.

Definition 3.48

Für alle $z \in \mathbb{C}$ seien die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Eulersche Formel

Folgerung 3.49

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Eulersche Formel:

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).$$

Beweis.

Analog zum Beweis von Lemma 3.47. Es ergibt sich dann die Potenzreihendarstellung

$$\exp(\mathrm{i}z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

$\square$

Eigenschaften von Sinus und Cosinus (1)

Satz 3.50

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(i)

$$\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$$

(ii)

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(-z) \\ \sin(z) &= -\sin(-z) \end{aligned}$$

Eigenschaften von Sinus und Cosinus (2)

Satz 3.51

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z))\end{aligned}$$

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Satz 3.52

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(i)

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

(ii)

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \end{aligned}$$

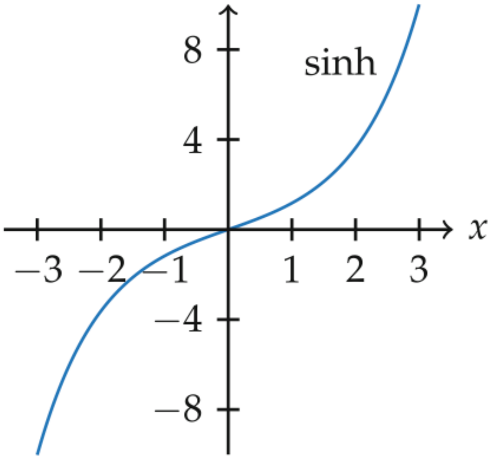
Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

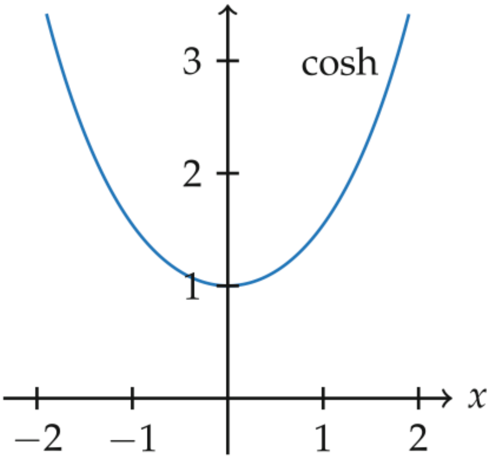
Definition 3.53

Für alle $z \in \mathbb{C}$ seien die Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)), \\ \cosh(z) &= \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) \end{aligned}$$

Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus in $\mathbb{R}$





Potenzreihendarstellung des Sinus/Cosinus Hyperbolicus

Satz 3.54

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\sinh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Eigenschaften des Sinus/Cosinus Hyperbolicus

Satz 3.55

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\sinh(z) + \cosh(z) = \exp(z)$,

(ii) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$,

(iii) $\cosh(z \pm w) = \cosh(z)\cosh(w) \pm \sinh(z)\sinh(w)$,

(iv) $\sinh(z \pm w) = \sinh(z)\cosh(w) \pm \cosh(z)\sinh(w)$,

(v) $\sin(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\sinh(y)$

(vi) $\cos(\mathrm{i}y) = \cosh(y)$

(vii) $\cos(x + \mathrm{i}y) = \cos(x)\cosh(y) - \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y)$,

(viii) $\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y)$.

Identitätssatz für Potenzreihen

Satz 3.56

Seien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien $R_f > 0$ und $R_g > 0$.

Gilt

$$f(z) = g(z) \text{ für alle } z \text{ mit } 0 \leq |z| < \min\{R_f, R_g\},$$

dann sind die beiden Potenzreihen identisch, d. h. $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Anschauliche Interpretation:

- Wenn zwei Potenzreihen die gleiche Funktion darstellen, sind die Koeffizientenfolgen identisch.

Mit dem Identitätssatz können wir explizite Formeln für rekursiv definierte Folgen begründen.

Beispiel 3.57

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 2a_{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

Mit dieser Folge definieren wir die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Wegen

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = 2|z|$$

beträgt der Konvergenzradius $R = \frac{1}{2}$.

Fortsetzung Beispiel.

Durch Anwendung der rekursiven Definition ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n \\ &= 1 + 2z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} \\ &= 1 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + 2z\, f(z). \end{aligned}$$

Wenn wir die Gleichung nach $f(z)$ auflösen, erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Fortsetzung Beispiel.

Wir kennen aber noch eine andere Potenzreihe, welche die Funktion $\frac{1}{1-2z}$ darstellt, denn mit der Formel für die geometrische Reihe erhalten wir

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}.$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt, dass die Koeffizienten der beiden Potenzreihen $f(z)$ und $g(z)$ gleich sind, also

$$a_n = 2^n.$$

Damit haben wir eine explizite Formel für die Folgenglieder.

Das letzte Beispiel war sehr einfach, auf die explizite Formel wäre man wohl auch durch scharfes Hinsehen gekommen. Das nächste Beispiel ist ein wenig schwieriger.

Beispiel 3.58

Wir wandeln die Folge des letzten Beispiels leicht ab.

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 2a_{n-1} + 1 \text{ für } n \geq 1.$$

Herleitung an der Tafel, u. a. wird das Cauchy-Produkt von Reihen verwendet.

Ergebnis:

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

Partialbruchzerlegung

Eine sehr hilfreiche Technik bei der Behandlung komplexerer Rekursionen ist die Partialbruchzerlegung.

Satz 3.59

Seien $Z(x)$ und $N(x)$ Polynome und der Grad von $Z(x)$ sei kleiner als der Grad von $N(x)$. Wir betrachten hier nur den Fall, dass $N(x)$ ausschließlich reelle Nullstellen hat.

- *m sei die Anzahl der reellen Nullstellen von $N(x)$,*
- *$x_1, x_2, \ldots, x_m$ seien diese Nullstellen und*
- *r_i mit $i = 1, \ldots, m$ sei die Vielfachheit der Nullstelle x_i.*

Dann existieren reelle Zahlen a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i)$ mit

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j}.$$

Beispiel 3.60

Wir betrachten die Funktion

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{4x}{1-2x-3x^2}.$$

Die Nullstellen von $N(x)$ sind $\frac{1}{3}$ und -1 jeweils mit Vielfachheit 1. Nach dem Satz der Partialbruchzerlegung existieren also Konstanten a und b mit

$$\frac{4x}{1-2x-3x^2} = \frac{-\frac{4}{3}x}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}} = \frac{a}{x-\frac{1}{3}} + \frac{b}{x+1}.$$

Um diese Zahlen a und b zu ermitteln, machen wir die Summanden des rechten Terms gleichnamig und führen einen Koeffizientenvergleich durch.

$$\frac{a}{x-\frac{1}{3}} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-\frac{1}{3})}{(x-\frac{1}{3})(x+1)} = \frac{(a+b)x+(a-\frac{1}{3}b)}{(x-\frac{1}{3})(x+1)}$$

Fortsetzung Beispiel.

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS:

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -\frac{4}{3} \\ a & - & \frac{1}{3}b & = & 0 \end{array}$$

Mit der Lösung $a = -\frac{1}{3}$ und $b = -1$. Also

$$\begin{aligned} \frac{4x}{1-2x-3x^2} &= \frac{-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Erzeugende Funktion

Definition 3.61

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die Funktion

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

erzeugende Funktion der Folge (a_n).

- Schon in den Beispielen 3.57 und 3.58 haben wir erzeugende Funktionen verwendet.
- Mit Ihnen gelingt der Übergang von einer Folge zu einer Funktion.

Beispiele für erzeugende Funktionen

Beispiel 3.62

- $a_n = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

- $a_n = n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

- $a_n = n^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Fortsetzung Beispiel.

- $a_n = (-1)^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

- $a_n = a^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az}$$

- $a_n = \frac{1}{n!}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z)$$

Vorgehen zur Herleitung expliziter Folgen

1. Zu einer rekursiv definierten Folge (a_n) stellen wir die Potenzreihe der erzeugenden Funktion auf und zeigen $R > 0$.
2. Durch Anwendung der rekursiven Definition von a_n auf die Potenzreihe ermitteln wir die die explizite Darstellung der erzeugenden Funktion.
3. Wir stellen die erzeugende Funktion als Linearkombination bekannter Potenzreihen dar. Hierbei ist häufig eine Partialbruchzerlegung hilfreich.
4. Wir fassen die Linearkombination der Potenzreihen zu einer Potenzreihe zusammen. So entsteht eine explizite Formel für die Koeffizienten der Potenzreihe der erzeugenden Funktion. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen diese dann mit der rekursiven Definition übereinstimmen.

Beispiel: Herleitung einer expliziten Folge

Beispiel 3.63

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 0, a_1 = 4 \text{ und } a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Schritt 1: Mit Induktion sieht man leicht, dass (a_n) nicht negativ und damit monoton steigend ist. Das Quotientenkriterium liefert

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2a_n + 3a_{n-1}}{a_n} |z| \leq \frac{2a_n + 3a_n}{a_n} |z| \leq 5|z|.$$

Die Potenzreihe $G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert also für $|z| < \frac{1}{5}$, damit gilt $R > 0$ und $G(z)$ ist für $|z| < \frac{1}{5}$ definiert.

Fortsetzung Beispiel.

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0 + 4z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \\
&= 4z + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n \\
&= 4z + 2z\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + 3z^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} \\
&= 4z + 2z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + 3z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= 4z + 2zG(z) + 3z^2 G(z)
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beispiel.

Wir lösen nach $G(z)$ auf und erhalten

$$G(z) = \frac{4z}{1 - 2z - 3z^2}.$$

Schritt 3: Aus Beispiel 3.60 wissen wir

$$\frac{4z}{1 - 2z - 3z^2} = \frac{1}{1 - 3z} - \frac{1}{1 + z}.$$

Beide Summanden der rechten Seite sind geometrische Reihen.

$$\frac{1}{1 - 3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

$$\frac{1}{1 + z} = \frac{1}{1 - (-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Fortsetzung Beispiel.

Schritt 4: Aus Schritt 3 folgt

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1+z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(3^n - (-1)^n)}_{=a_n} z^n. \end{aligned}$$

Also gilt nach dem Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_n = 3^n - (-1)^n.$$

Damit haben wir die gewünschte explizite Folge, die identisch mit der rekursiven Definition ist.

Zusammenfassung

- Reihe als Folge der Partialsumme
- Absolute Konvergenz ist deutlich strenger als Konvergenz.
- Majoranten- und Minorantenkriterium, Quotienten- und Wurzelkriterium
- Cauchy-Produkt
- Potenzreihen, Konvergenzradius
- Elementare Funktionen: $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh$
- Identitätssatz für Potenzreihen, Partialbruchzerlegung
- Anwendung: Herleitung expliziter Folgen