Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Analysis
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann
Fachbereich Informatik

Sommersemester 2020
3. Juni 2020

Beweis für die Quotientenregel der Differentialrechnung

Quotientenregel: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar mit $g(x_0) \neq 0$. Dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Wir zeigen zwei Beweise der Quotientenregel. Der erste Beweis folgt dem Ansatz der Produktregel. In diesem Beweis wird die Quotientenregel ausgehend vom Differenzenquotienten für $\frac{f}{g}$ direkt hergeleitet. Im zweiten Beweis wird zunächst eine spezielle Regel für die Ableitung von $\frac{1}{g}$ bewiesen. Anschließend wird die Produktregel für den Nachweis der Quotientenregel benutzt.

1. Beweis

Wir gehen vom Differenzenquotienten für $\frac{f}{g}$ aus.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)
\end{aligned}$$

Weil f, g differenzierbar in x_0 sind und g damit auch stetig in x_0 ist, folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(g(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{g^2(x_0)}\left(g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\right) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

2. Beweis

Wir zeigen zunächst die Hilfsaussage

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis der Hilfsaussage:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &= -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= -\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= -\frac{1}{g^2(x_0)} \cdot g'(x_0) \\ &= -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

Damit ist die Hilfsaussage beweisen. Jetzt nutzen wir die Produktregel und die Hilfsaussage, um die Quotientenregel zu beweisen.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$