Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Analysis

Klausur Sommersemester 2015

24. September 2015

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkte erhalten Sie eine 1.0.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Tipp: Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+3+2+3=10 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Reihen von (a) bis (c), ob sie

- absolut konvergent,
- konvergent aber nicht absolut konvergent oder
- divergent

ist (mit Begründung).

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + \log(n)}{4n^2 + \sqrt{n}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + 2n}{2 + 3n}\right)^n$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

Lösung:

(a) Die Reihe ist divergent, denn es gilt

$$\left|\frac{3n + \log(n)}{4n^2 + \sqrt{n}}\right| \geq \frac{3n}{4n^2 + n^2} = \frac{3n}{5n^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{n}$$

Damit ist die harmonische Reihe mit dem Faktor $\frac{3}{5}$ eine Minorante. Mit dem Minoranten-kriterium folgt die Divergenz.

(b) Es gilt $\log(n) \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$. Weiterhin ist $\log(n)$ streng monoton wachsend. Damit ist

$$\frac{1}{1+\log(n)}$$

eine streng monoton fallende Nullfolge. Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\log(n)}$$

konvergent ist. Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent, denn wegen

$$\left|\frac{(-1)^n}{1+\log(n)}\right| = \frac{1}{1+\log(n)} \geq \frac{1}{n}$$

ist die harmonische Reihe eine Minorante.

(c) Am einfachsten geht es mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{3+2n}{2+3n}\right)^n\right|} = \frac{3+2n}{2+3n} \longrightarrow \frac{2}{3} < 1$$

Also ist die Reihe absolut konvergent.

Auch einfach: Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe als Majorante. Es gilt

$$\frac{3+2n}{2+3n} \longrightarrow \frac{2}{3}$$

Wähle $\epsilon = \frac{1}{6}$. Also existiert ein n_0 mit $\left|\frac{3+2n}{2+3n} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{6}$ für alle $n \geq n_0$.

Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\frac{3+2n}{2+3n} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Damit ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$ ab n_0 eine Majorante.

Mit dem Quotientenkriterium muss man mehr rechnen, geht aber auch:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\left(\frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3+2n}{2+3n}\right)^n}\right| &= \frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)} \left(\frac{\frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)}}{\frac{3+2n}{2+3n}}\right)^n \\
&= \frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)} \left(\frac{(3+2(n+1))(2+3n)}{(2+3(n+1))(3+2n)}\right)^n \\
&= \frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)} \left(\frac{(5+2n)(2+3n)}{(5+3n)(3+2n)}\right)^n \\
&= \frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)} \underbrace{\left(\frac{10+19n+6n^2}{15+19n+6n^2}\right)^n}_{\leq 1} \\
&\leq \frac{3+2(n+1)}{2+3(n+1)} \longrightarrow \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

(d) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}x^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n}\right| = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2}|x| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}|x| \longrightarrow 4|x|$$

Also: Konvergenzradius $R = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 2 (2+3+2+1+2=10 Punkte)

Wir betrachten die Folge der Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{für } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f_n.

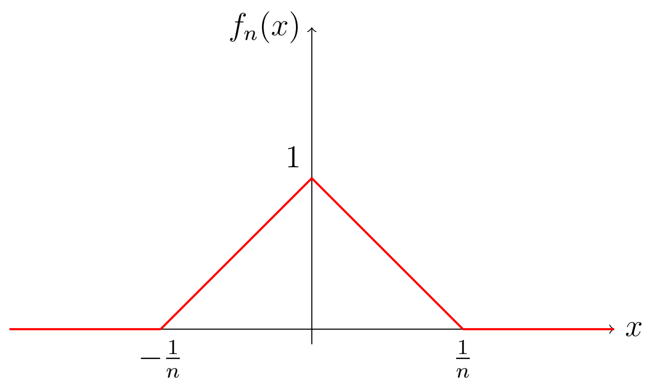
(b) Gegen welche Funktion f konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise? (Die Antwort muss begründet werden.)

(c) Geben Sie die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) gegen eine Grenzfunktion f an.

(d) Wie lautet die Negation der Bedingung aus (c)?

(e) Zeigen Sie mit der Bedingung aus (d), dass die oben definierte Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert.

Lösung:

(a) 

(b)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Begründung:

- $x = 0$: Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle n und somit gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.
- $x \neq 0$: Dann gilt für alle $n \geq \left|\frac{1}{x}\right| : f_n(x) = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(c) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion f genau dann, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \, \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

(d)

$$\exists \epsilon > 0 \, \forall n_0 \in \mathbb{N} \, \exists n \geq n_0 \, \exists x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$$

(e) Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}$. Sei n_0 beliebig. Wähle $n = n_0$ und $x = \frac{1}{2n_0}$. Damit gilt $x \neq 0$ und somit $f(x) = 0$. Es ergibt sich

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f_{n_0}\left(\frac{1}{2n_0}\right)\right| = \left|1 - n_0 \cdot \frac{1}{2n_0}\right| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \geq \epsilon$$

Aufgabe 3 (3+2+5=10 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{-3x^2} & \text{für } x \geq 0 \\ 2x + b & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

(b) Ist die Funktion f aus (a) in $x_0 = 0$ differenzierbar (mit Begründung)?

(c) Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 12x + 5$$

hat *genau* eine Nullstelle.

Lösung:

(a) Die Funktion $f(x) = a\,\mathrm{e}^{-3x^2}$ ist stetig für $x > 0$, die Funktion $f(x) = 2x + b$ ist stetig für $x < 0$, also ist $f(x)$ auf jeden Fall stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Damit $f(x)$ stetig in $x_0 = 0$ ist, müssen der links- und rechtsseitige Funktionsgrenzwert in x_0 übereinstimmen, d. h. es muss

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} f(x)$$

gelten. Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} a\,\mathrm{e}^{-3x^2} = a \cdot \lim_{x \searrow 0} \mathrm{e}^{-3x^2} = a \cdot \mathrm{e}^0 = a$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} 2x + b = 2 \cdot 0 + b = b$$

Also ist $f(x)$ genau dann auf $\mathbb{R}$ stetig, wenn $a = b$ gilt.

(b) Für $x \geq 0$ gilt $f'(x) = -6x\,a\mathrm{e}^{-3x^2}$ und damit $f'(0+) = 0$.

Für $x < 0$ gilt $f'(x) = 2$ und damit $f'(0-) = 2$.

Also gilt immer $f'(0+) \neq f'(0-)$. Damit ist die Funktion in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

(c) f ist stetig (Polynom). Es gilt $f(0) = 5 > 0$ und $f(-1) = -\frac{1}{3} - 3 - 12 + 5 < 0$. Also hat f nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 6x + 12 \\ &= (x^2 - 6x + 9) + 3 \\ &= (x - 3)^2 + 3 > 0 \end{aligned}$$

Also ist f streng monoton steigend und hat damit höchstens eine Nullstelle.

Aus mindestens eine Nullstelle und höchstens eine Nullstelle folgt genau eine Nullstelle.

Aufgabe 4 (3+3+4=10 Punkte)

Bestimmen Sie für (a) und (b) die Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x)-1}{x^3+5x^2}$$

Es sei $f(x) = x\mathrm{e}^{ax}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie:

(c)

$$f^{(n)}(x) = (a^n x + na^{n-1})\mathrm{e}^{ax}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos(2x)} \\ &= \frac{1}{2\cos(0)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x)-1}{x^3+5x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sinh(2x)}{3x^2+10x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\cosh(2x)}{6x+10} \\ &= \frac{4\cosh(0)}{10} \\ &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

(c) $n = 0$:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = x\mathrm{e}^{ax} = (a^0 x + 0\cdot a^{0-1})\mathrm{e}^{ax}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left((a^n x + na^{n-1})\mathrm{e}^{ax}\right)' \\ &= a^n\mathrm{e}^{ax} + (a^n x + na^{n-1})\cdot a\cdot \mathrm{e}^{ax} \\ &= a^n\mathrm{e}^{ax} + (a^{n+1}x + na^n)\mathrm{e}^{ax} \\ &= (a^n + a^{n+1}x + na^n)\mathrm{e}^{ax} \\ &= (a^{n+1}x + (n+1)a^n)\mathrm{e}^{ax}\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (2+5+3=10 Punkte)

(a) Zitieren Sie den Mittelwertsatz.

(b) Es gelte $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien zwei auf $[a, b]$ differenzierbare Funktionen.
Zeigen Sie: Aus $f(a) \leq g(a)$ und $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in [a, b]$ folgt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 30x^2 - 6x + 2$$

streng konvex ist.

Lösung:

(a) Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b)
- Am einfachsten geht es mithilfe der Monotonie:
  Wir definieren $h(x) := f(x) - g(x)$. Damit folgt nach Voraussetzung $h(a) = f(a) - g(a) \leq 0$.
  Da f und g differenzierbar sind, ist auch h differenzierbar und es gilt $h'(x) \leq 0$ (wegen $f'(x) \leq g'(x)$). Damit ist $h(x)$ monoton fallend.
  Wenn $h(x)$ monoton fallend ist, folgt $h(x) \leq h(a) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
  Aus $h(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ folgt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.
- Beweis direkt mithilfe des Mittelwertsatzes:
  Wir definieren $h(x) := f(x) - g(x)$. Damit folgt nach Voraussetzung $h(a) = f(a) - g(a) \leq 0$.
  Da f und g differenzierbar sind, ist auch h differenzierbar und es gilt $h'(x) \leq 0$ (wegen $f'(x) \leq g'(x)$).
  Mit dem Mittelwertsatz folgt für ein beliebiges $x \in [a, b]$:

  $$h(x) - h(a) = h'(\xi)(x - a)$$

  und damit

  $$h(x) = \underbrace{h(a)}_{\leq 0} + \underbrace{h'(\xi)}_{\leq 0}\underbrace{(x - a)}_{>0} \leq 0$$

  Aus $h(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ folgt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

(c) Wenn $f''(x) > 0$ gilt, dann ist f streng konvex. Also berechnen wir die zweite Ableitung.

$$f'(x) = x^3 - 12x^2 + 60x - 6$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3x^2 - 24x + 60 \\ &= 3(x^2 - 8x + 20) \\ &= 3\left((x-4)^2 + 4\right) > 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (3+3+4=10 Punkte)

Ermitteln Sie eine Stammfunktion:

(a)

$$\int x^2 \cos(x)\, dx$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(b)

$$\int_{-1}^{1} x \sin(1 + x^2)\, dx$$

(c) Es sei $\alpha > 0$.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x + \beta}\, dx$$

Lösung:

(a)

$$\int x^2 \cos(x)\, dx$$

Partielle Integration: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \sin(x)$

$$= x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x)\, dx$$

nochmals partielle Integration: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1, g'(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = -\cos(x)$

$$\begin{aligned} &= x^2 \sin(x) - 2 \left(-x \cos(x) + \int \cos(x)\, dx \right) \\ &= x^2 \sin(x) - 2 \left(-x \cos(x) + \sin(x) \right) \\ &= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) \end{aligned}$$

(b) Wir ermitteln zunächst eine Stammfunktion

$$\int x \sin(1 + x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(1 + x^2)\, dx$$

Substitution: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x), g(x) = 1 + x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$$= -\frac{1}{2} \cos(1 + x^2)$$

Damit ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} x \sin(1 + x^2)\, dx = -\frac{1}{2} \cos(1 + x^2) \Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} \cos(2) - \left(-\frac{1}{2} \cos(2) \right) = 0$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x+\beta}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha x+\beta}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x+\beta}\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t+\beta}+\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\beta} \\
&= \frac{1}{\alpha}\lim_{t\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\beta}-\underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha t+\beta}}_{\longrightarrow 0}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\beta}
\end{aligned}
$$