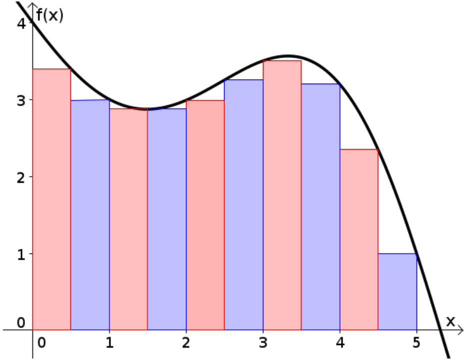
Kapitel 6

Integrale



Inhalt

Flächenberechnungen

Ursprung der Integralrechnung: Flächenberechnung.

Aber wie ermittelt man den Inhalt einer Fläche, die durch krummlinige Kurven begrenzt ist?

Grundprinzip der Flächenberechnung:

- Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b ist $a \cdot b$.
- Der Flächeninhalt einer disjunkten Vereinigung von Rechtecken ist gleich der Summe der Einzelflächen.
- Allgemeinere Flächen werden durch endliche disjunkte Vereinigungen von Rechtecken approximiert.

  Den Flächeninhalt erhält man dann als Grenzwert.

Integralbegriff (1)

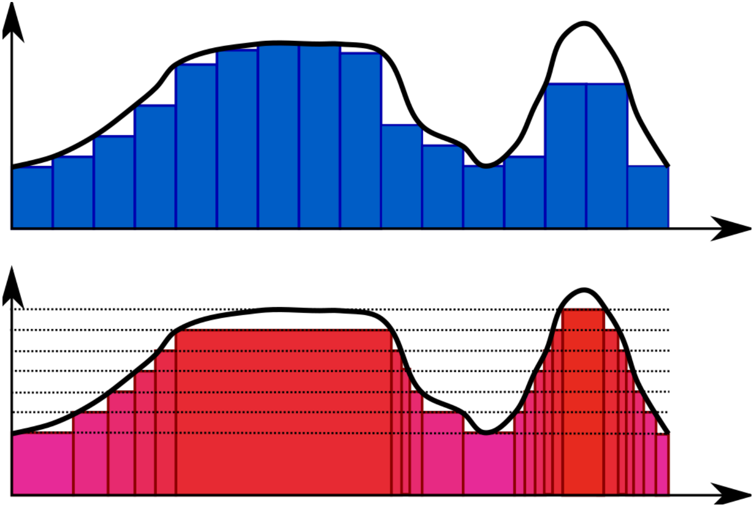
Wie soll diese Approximation mit Hilfe von Rechtecken aussehen?

- Der klassische Integralbegriff: Riemann-Integral
  - Approximation mittels Rechtecken einer Breite h, mit $h \to 0$
  - Der am häufigsten gelehrte und in der Literatur vorhandene Zugang (siehe z.B. Forster, Heuser, u. a.).
  - Nachteil: Der Integralbegriff ist komplexer und schwieriger einzuführen als das Integral über Regelfunktionen.
- Der pragmatische Integralbegriff: Integral für Regelfunktionen
  - Vorteil: einfacher Zugang, enthält trotzdem die für die Praxis wichtigen Funktionen
  - Idee: Statt die Fläche zu approximieren wird die Funktion durch Rechteck- bzw. Treppenfunktionen approximiert.
  - Literatur: Grieser, Königsberger
  - Nachteil: Der so definierte Integralbegriff ist weniger allgemein.

Integralbegriff (2)

- Der Integralbegriff der modernen Mathematik: Lebesgue-Integral
  - Integration von Funktionen, die auf beliebigen Maßräumen definiert sind
  - Interessant bspw. für stochastische Anwendungen (Integration auf der Basis von Wahrscheinlichkeitsmaßen)
  - Für $\mathbb{R}$ Verallgemeinerung des Riemann-Integrals: jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-integrierbar, aber nicht umgekehrt.
  - Unterteilung der y-Achse (Ordinate), statt der x-Achse (Abszisse).
  - Wird in der Lehre immer populärer, entweder
    - zusätzliche Einführung des Lebesgue-Integrals in weiterführenden Vorlesungen (Analysis X mit $X > 1$ oder Stochastik) oder
    - im Mathematikstudium direkt im ersten Semester statt des Riemann-Integrals.

Riemann- vs. Lebesgue-Integral



Treppenfunktion

Definition 6.1

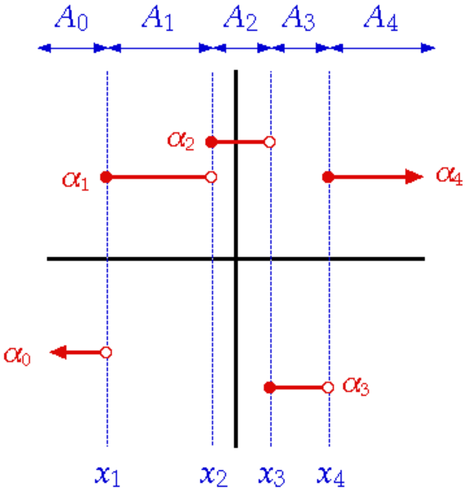
Eine Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls $m \in \mathbb{N}$ und es Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_m \in [a, b]$ gibt, mit

(i) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ und

(ii) T ist konstant auf jedem der Intervalle $(x_{i-1}, x_i), i = 1, \ldots, m$.

Bemerkung: Die Werte an der Stellen $x_0, \ldots, x_m$ können beliebig sein.

Beispiel einer Treppenfunktion



Integral einer Treppenfunktion

Definition 6.2

Sei T eine Treppenfunktion, und sei $T(x) = a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, \ldots, m$.

Dann sei

$$\int_a^b T(x)\,dx := \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

das (bestimmte) Integral von T über dem Intervall $[a, b]$.

Diskussion: Integral von Treppenfunktionen

- Wie bei Reihen spielt der Variablenname unter dem Integral keine Rolle.

$$\int_a^b T(x)\,dx = \int_a^b T(t)\,dt = \int_a^b T(\lambda)\,d\lambda$$

- Flächen unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt! Dies ist praktisch für Rechnungen und Eigenschaften des Integrals (z.B. Linearität).
- Den "echten" Flächeninhalt erhält man durch $\int_a^b |T(x)|\,dx$. Insbesondere gilt: Wenn T eine Treppenfunktion ist, ist auch $|T|$ eine Treppenfunktion.

Beispiel 6.3

Sei

$$T(x) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{für } 2 \leq x < 5 \\ -2 & \text{für } 5 \leq x < 9 \\ 1 & \text{für } 9 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{10} T(x)\,dx &= 5 \cdot (2-0) + 3 \cdot (5-2) + (-2) \cdot (9-5) + 1 \cdot (10-9) \\ &= 10 + 9 - 8 + 1 = 12. \end{aligned}$$

Verfeinerung

Die Funktion T legt die möglichen Sprungstellen x_i nicht eindeutig fest. Was passiert mit dem Integral, wenn wir neue Zwischenpunkte einführen, ohne die Funktion zu ändern?

Beispiel 6.4

$$T(x) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -3 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{ist auch} \quad T(x) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 5 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ -3 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Aber beide Varianten liefern für das Integral den gleichen Wert:

$$\begin{aligned} \int_0^2 T(x)\,dx &= 5 \cdot (1-0) + (-3) \cdot (2-1) \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (-3) \cdot (2-1) = 2. \end{aligned}$$

Unabhängigkeit von der Wahl der Zwischenpunkte

Die Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte wie in Beispiel 6.4 nennen wir Verfeinerung.

Lemma 6.5

Es sei $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion.

Dann ist das Integral

$$\int_a^b T(x)\,dx$$

wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte x_i.

Bemerkung: Nur aufgrund dieses Lemmas ist die Notation $\displaystyle\int_a^b T(x)\,dx$ überhaupt gerechtfertigt, da sie keinen Bezug auf die x_i enthält.

Beweis.

- Wenn wir die Darstellung von T um einen Zwischenpunkt x' zwischen x_{j-1} und x_j verfeinern, wird in $\sum_{i=1}^{m} a_i(x_i - x_{i-1})$ der Summand

$$a_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{durch} \quad a_j(x_j - x') + a_j(x' - x_{j-1})$$

  ersetzt.
- Wegen $x_j - x_{j-1} = (x_j - x') + (x' - x_{j-1})$ bleibt die Summe gleich.
- Da wir diesen Prozess wiederholen können, ändert sich die Summe auch dann nicht, wenn wir mit mehreren Zwischenpunkten verfeinern.
- Ist die Funktion T einmal mittels der Zwischenpunkte $x_0, \dots, x_m$ und ein weiteres mal mittels der Zwischenpunkte $y_0, \dots, y_k$ gegeben, so bilden wir die gemeinsame Verfeinerung

$$\{x_0, \dots, x_m\} \cup \{y_0, \dots, y_k\}.$$

Fortsetzung Beweis.

- Nach der obigen Argumentation ist das Integral für die gemeinsame Verfeinerung sowohl gleich mit der Summe für die x-Zwischenpunkte als auch mit der für die y-Zwischenpunkte.

Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen (1)

Lemma 6.6

Wenn T, S Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind auch αT und $T + S$ Treppenfunktionen.

Beweis.

- Ist $T(x) = a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, dann ist $\alpha T(x) = \alpha a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, also ist αT eine Treppenfunktion.
- Es seien $x_0, \ldots, x_m$ die Sprungstellen von T und $y_0, \ldots, y_k$ die Sprungstellen von S. Dann bilden wir für beide Funktionen eine Verfeinerung mit den Zwischenpunkten $\{x_0, \ldots, x_m\} \cup \{y_0, \ldots, y_k\}$.

  Ist jetzt $T(x) = a_i$ und $S(x) = b_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, dann ist $T(x) + S(x) = a_i + b_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Also ist $T + S$ eine Treppenfunktion.

Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen (2)

Lemma 6.7

Sei $\mathcal{T}[a,b]$ die Menge der Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \int_a^b \quad : \quad & \mathcal{T}[a,b] \to \mathbb{R} \\ & T \mapsto \int_a^b T(x)\,dx \end{aligned}$$

(i) *linear, d. h. für alle $T, S \in \mathcal{T}[a,b]$ gilt*

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha T(x)\,dx &= \alpha \int_a^b T(x)\,dx \quad \text{und} \\ \int_a^b T(x) + S(x)\,dx &= \int_a^b T(x)\,dx + \int_a^b S(x)\,dx, \end{aligned}$$

Fortsetzung Lemma.

(ii) *beschränkt*, *d. h. für alle* $T \in \mathcal{T}[a,b]$ *gilt*

$$\left| \int_a^b T(x)\,dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |T(x)| \cdot (b-a)$$

(iii) *monoton*, *d. h. für alle* $T, S \in \mathcal{T}[a,b]$ *gilt*

$$T(x) \leq S(x) \text{ für alle } x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b T(x)\,dx \leq \int_a^b S(x)\,dx.$$

Beweis.

(i)

$$\int_a^b \alpha T(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_i(x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_i(x_i - x_{i-1}) = \alpha \int_a^b T(x)\,dx$$

Es sei $x_0, \ldots, x_m$ die gemeinsame Verfeinerung aus dem Beweis von Lemma 6.6.

$$\begin{aligned}
\int_a^b T(x) + S(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_a^b T(x)\,dx + \int_a^b S(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

(iii) Seien die x_i, a_i, b_i wie im Beweis für $+$ in (i). Aus $T \leq S$ folgt $a_i \leq b_i$ für jedes i. Wegen $x_i - x_{i-1} \geq 0$ gilt dann:

$$\int_a^b T(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} a_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

(ii)
- Sei $M = \sup_{x \in [a,b]} |T(x)|$ und $S_-(x) = -M$, $S_+(x) = M$ konstante Funktionen auf $[a, b]$.
- Dann gilt $S_-(x) \leq T(x) \leq S_+(x)$ für alle $x \in [a, b]$.
- Mit (iii) folgt $\int_a^b S_-(x)\,dx \leq \int_a^b T(x)\,dx \leq \int_a^b S_+(x)\,dx$.
- Weiterhin gilt: $\int_a^b S_-(x)\,dx = -M(b-a)$ und $\int_a^b S_+(x)\,dx = M(b-a)$.
- Also $-M(b-a) \leq \int_a^b T(x)\,dx \leq M(b-a)$ und somit $\left|\int_a^b T(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$.

Regelfunktion

Definition 6.8

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, so dass T_n (für $n \to \infty$) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beispiel für eine Regelfunktion

Beispiel 6.9

Sei $f(x) = x$ auf $[0,1]$. Wir definieren die Folge (T_n) der Treppenfunktion durch

$$T_n(1) = 1 \quad \text{und} \quad T_n(x) = \frac{i}{n} \text{ für } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), i = 1, \dots, n.$$

Für T_n ist demnach $x_i = \frac{i}{n}$ und $a_i = \frac{i}{n}$.
Für $x \in [x_{i-1}, x_i)$ gilt $0 < a_i - x \leq \frac{1}{n}$.
Damit folgt

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n(x)| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Also konvergiert T_n gleichmäßig gegen f.

Integral für eine Regelfunktionen

Satz 6.10

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und (T_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dann konvergiert die Folge

$$\left(\int_a^b T_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

der Integrale und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der T_n. Wir definieren damit

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b T_n(x)\,dx.$$

Beispiel 6.11

Wir setzen Beispiel 6.9 fort und berechnen $\int_0^1 x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 T_n(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

also gilt $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Beweis von Satz 6.10.

Wir zeigen zunächst, dass $\left(\int_a^b T_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

- Sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $\epsilon' := \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.
- N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\sup_{x\in[a,b]} |T_n(x) - f(x)| < \epsilon'$.
- Seien $n, m \geq n_0$ beliebig. Dann gilt

$$|T_m(x) - T_n(x)| \leq |T_m(x) - f(x)| + |f(x) - T_n(x)| < 2\epsilon'.$$

- Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b T_m(x)\,dx - \int_a^b T_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (T_m(x) - T_n(x))\,dx\right| \\ &< 2\epsilon'(b-a) = \epsilon. \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Wir zeigen nun, dass für jede gleichmäßig konvergente Folge (T_n) der selbe Grenzwert entsteht.

- Seien (T_n) und (S_n) Folgen von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren.
- Sei (U_n) die Folge $T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3, \ldots$.
- Dann konvergiert auch (U_n) gleichmäßig gegen f (machen sie sich klar, warum).
- Damit konvergiert nach dem ersten Teil $\int_a^b U_n(x)\,dx$. Sei

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx$$

- Da $\left(\int_a^b T_n(x)\,dx\right)$ und $\left(\int_a^b S_n(x)\,dx\right)$ Teilfogen von $\left(\int_a^b U_n(x)\,dx\right)$ sind, konvergieren beide ebenfalls gegen a.

Eigenschaften des Integrals

Satz 6.12

(i) *Sind f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind auch αf und $f + g$ Regelfunktionen.*

(ii) *Sei $\mathcal{R}[a, b]$ die Menge der Regelfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \int_a^b \quad : \quad & \mathcal{R}[a, b] \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

ist linear, beschränkt und monoton (vgl. Lemma 6.6).

Beweis.

Folgt aus Grenzwertregeln und Eigenschaften konvergenter Folgen. □

Stückweise Stetigkeit

Definition 6.13

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \dots, x_m$ gibt mit

(i) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$,

(ii) f ist stetig auf jedem der Intervalle (x_{i-1}, x_i) und

(iii) die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow x_i} f(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow x_i} f(x)$ existieren für $i = 0, \dots, m-1$ bzw. $i = 1, \dots, m$.

Bemerkungen:

- Eine stückweise stetige Funktion darf also endlich viele Sprungstellen haben.
- Zum Beispiel sind Treppenfunktionen stückweise stetig.

Approximation durch Treppenfunktionen (1)

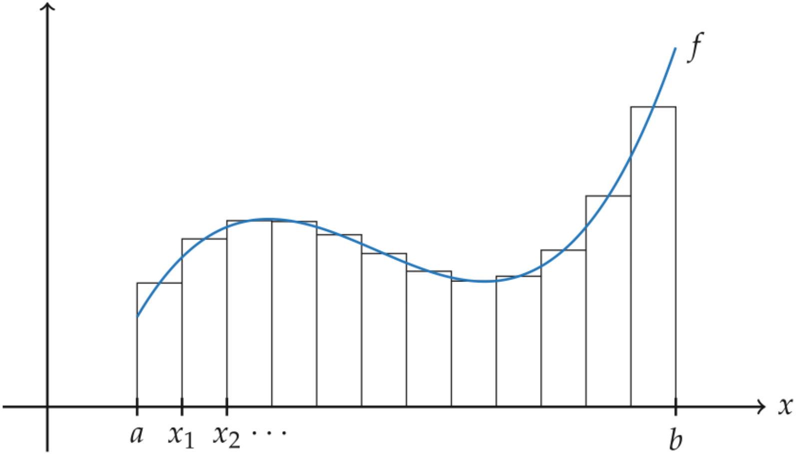
Satz 6.14

Stückweise stetige Funktionen sind Regelfunktionen.

Beweisidee.

- Wir approximieren die stetige Funktion durch eine Folge von Treppenfunktion.
- Hierzu unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle mit der Länge $\frac{b-a}{n}$.
- Wir setzen $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$.
- Wir definieren $T_n(x) = f(x_i)$ für $x \in [x_{i-1}, x_i)$, sowie $T_n(b) = f(b)$.
- Jetzt müssen wir noch zeigen, dass T_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

Approximation durch Treppenfunktionen (2)



Hier $T_n(x) = f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2})$ für $x \in [x_{i-1}, x_i)$.

Elementare Funktionen sind Regelfunktionen

Wichtige Konsequenzen aus Satz 6.14:

- Stetige Funktionen sind auch stückweise stetige Funktionen.
- Damit sind nach Satz 6.14 stetige Funktionen auch Regelfunktionen.
- Insbesondere sind also die elementaren Funktionen (Polynome, Exponentialfunktion, etc.) Regelfunktionen und damit integrierbar.
- Dies gilt natürlich auch für die Verknüpfung von stetigen Funktionen gemäß Stetigkeitsregeln (Linearkombination, Quotient, Verkettung).

Beispiel 6.15

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)e^{-x^2}}{1 + \cos^2(x)}$$

ist eine Regelfunktion und damit existiert $\int_a^b f(x)\,dx$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

Approximation durch Treppenfunktionen (3)

Folgerung 6.16

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Interpretation:

- Der Term hinter dem Limes ist der Mittelwert der Funktionswerte an den Stellen x_i.
- Die rechte Seite können wir als den kontinuierlichen Mittelwert von f über dem Intervall $[a,b]$ ansehen.

Beweis.

Für die Treppenfunktion aus der Beweisidee von Satz 6.14 gilt

$$\int_a^b T_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}).$$

Nach Definition des Integrals für Regelfunktionen ist

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b T_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Formel folgt dann mittels Teilen durch $b-a$. $\square$

Gleichmäßige Konvergenz und Integration

Satz 6.17

Sei (f_n) eine Folge von Regelfunktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Dann ist auch f eine Regelfunktion und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Bemerkungen:

- Ähnliche Resultate kennen wir schon: bei gleichmäßiger Konvergenz dürfen wir Grenzwerte vertauschen.
- Hier: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$.
- Beachten Sie: Links konvergiert eine Zahlenfolge, rechts eine Funktionenfolge.

Allgemeine Integrationsgrenzen (1)

Definition 6.18

Seien $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

- Falls $a < b$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ schon definiert.
- Falls $a = b$, so gelte
$$\int_a^b f(x)\,dx := 0.$$
Falls $a > b$, so gelte
$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Allgemeine Integrationsgrenzen (2)

Satz 6.19

Ist f Regelfunktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und sind $a, b, c, \in I$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Stammfunktion

- Die Definition des Integrals ist für die Berechnung zu unhandlich.
- Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird uns ein mächtiges Werkzeug zur Integralberechnung liefern.
- Hierfür benötigen wir Stammfunktionen.

Definition 6.20

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls

- F differenzierbar auf I ist und
- $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Beispiele für Stammfunktionen

Beispiel 6.21

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ für $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$ für $x > 0$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig

Lemma 6.22

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt:

(i) *$F + c$ ist eine Stammfunktion von f für alle $c \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Ist auch G eine Stammfunktion von f, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$.*

Beweis.

(i) $(F + c)' = F' + \underbrace{c'}_{=0} = F' = f$.

(ii) Es gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, also ist $F - G$ eine konstante Funktion, also $F - G = c$.

Mittelwertabschätzung für Integrale

Für den Beweis des nachfolgenden Hauptsatzes benötigen wir eine Abschätzung des Integrals.

Lemma 6.23

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

Dann gilt

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Beweis.

- Wir beschränken uns darauf, den Nachweis für eine stetige Funktion f zu führen.
- Insbesondere existieren für stetige Funktion Minimum und Maximum auf einem abgeschlossenem Intervall (Extremwertsatz von Weierstraß, Satz 4.24).
- Sei $m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ und $g(x) := m$ für $x \in [a, b]$.
- Sei $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ und $h(x) := M$ für $x \in [a, b]$.
- g und h sind als konstante Funktionen auch Regel- und Treppenfunktionen.
- Es gilt:

$$\int_a^b g(x)\,dx = m(b-a) \quad \text{und} \quad \int_a^b h(x)\,dx = M(b-a).$$

Fortsetzung Beweis.

- Mit der Monotonie des Integrals (Satz 6.12) folgt:

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 6.24

Sei f eine Regelfunktion auf dem Intervall I und sei $a \in I$.

(i) *Wenn f stetig ist, dann ist*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f.

(ii) *Für eine beliebige Stammfunktion G von f und $a, b \in I$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: G(x)\big|_a^b .$$

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in I$ und f stetig. Wir müssen zeigen, dass $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar in x_0 ist und dass $F'(x_0) = f(x_0)$ gilt.

Hierzu untersuchen wir den Differenzenquotienten von F bei x_0 (in der h-Formulierung). Es gilt

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt,$$

also ergibt sich für den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Jetzt nutzen wir das Lemma 6.23 und erhalten damit

$$\inf_{t \in [x_0, x_0+h]} f(t) \le \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \le \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} f(t).$$

Fortsetzung Beweis.

(i) Da f stetig ist, folgt mit dem ϵ-δ-Kriterium

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0} \inf_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t) \quad \text{und} \quad f(x_0) = \lim_{h\to 0} \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t)$$

und damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

(ii) Wir beschränken uns wieder auf den Fall, dass f stetig ist.

- Nach (i) ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion.
- Nach Lemma 6.22 gilt dann $G(x) = F(x) + c$.
- Also:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt = F(b) &= F(b) - \underbrace{F(a)}_{=\int_a^a f(t)\,dt=0} \\ &= (G(b) - c) - (G(a) - c) = G(b) - G(a).\end{aligned}$$

Anwendung des Hauptsatzes

Der zweite Teil des Hauptsatzes erlaubt für Funktionen mit bekannter Stammfunktion eine einfache Berechnung von Integralen.

Beispiel 6.25

(i) Wir wollen $\int_1^5 2x^2 - 4x + 1\,dx$ berechnen. Es sei $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Dann ist $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x$ eine Stammfunktion von f. Also folgt mit dem zweiten Teil des Hauptsatzes

$$\begin{aligned}\int_1^5 2x^2 - 4x + 1\,dx &= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x\Big|_1^5 \\ &= \left(\frac{250}{3} - 50 + 5\right) - \left(\frac{2}{3} - 2 + 1\right) \\ &= 38\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii)

$$\int_0^1 e^x \, dx = e^x\big|_0^1 = e - 1$$

(iii) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \sin(x)\, dx &= -\cos(x)\big|_{-a}^{a} \\ &= -\cos(a) + \underbrace{\cos(-a)}_{=\cos(a)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Berechnung von Integralen

- Die größte Schwierigkeit bei der Anwendung des Hauptsatzes besteht im Finden einer Stammfunktion.
- Während es für die Ableitung klare Regeln gibt, die einfach nur angewendet werden müssen, um die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion zu ermitteln, ist dies bei der Integration nicht der Fall.
- Eine Stammfunktion muss stattdessen “konstruiert” werden.
- Für diese Konstruktion werden wir zwar Regeln kennenlernen, wir können aber nicht allgemein sagen, mit welchen Regeln die Stammfunktion gefunden werden kann.
- Insbesondere gibt es Funktionen, zu denen es keine elementaren Stammfunktionen gibt.

Das unbestimmte Integral

Definition 6.26

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann heißt die Menge

$$\int f(x)\,dx := \{F | F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$$

das unbestimmte Integral von f.

Bemerkungen:

- Im Folgenden schreiben wir auch kürzer, aber eigentlich ungenau, $\int f(x)\,dx = F(x)$.
- Genau müsste es eigentlich $F(x) \in \int f(x)\,dx$ heißen.

Partielle Integration

Satz 6.27

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Dann gilt:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis.

Aus der Produktregel für die Ableitung (Satz 5.8) und der Linearität des Integrals folgt:

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \Rightarrow\quad & f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \\ \Rightarrow\quad & \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \end{aligned}$$

Beispiele für die partielle Integration

Beispiel 6.28

(i) Berechne $\int xe^x \, dx$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & \Rightarrow \quad & f(x) = e^x \\ g(x) &= x & \Rightarrow \quad & g'(x) = 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Berechne: $\int \log(x)\,dx$.

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 1 & \Rightarrow & f(x) = x \\ g(x) = \log(x) & \Rightarrow & g'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Damit erhalten wir:

$$\int 1 \cdot \log(x)\,dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log(x) - x.$$

(iii) Berechne $\int x\sin(x)\,dx$.

$$\begin{array}{lll} f'(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x & \Rightarrow & g'(x) = 1 \end{array}$$

Damit erhalten wir:

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int 1 \cdot \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x).$$

Substitution

Satz 6.29

Seien $I, I' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $g : I \to I'$ stetig differenzierbar, $f : I' \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)).$$

Für das bestimmte Integral gilt außerdem:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = F(y)\big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

Bemerkung: Die Substitutionsregel kann sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links angewendet werden.

Beweis.

Mit der Kettenregel ergibt sich

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Also ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$.

Für das bestimmte Integral erhalten wir damit

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))|_a^b = F(y)|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Einfache Anwendungen der Substitutionsregel

Die Substitutionsregel lässt sich dann recht einfach anwenden, wenn in der Gesamtfunktion unter dem Integral die Ableitung einer inneren Funktion wieder als Faktor auftritt.

Beispiel 6.30

(i) Wir betrachten $\displaystyle\int x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$.

Mit $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und $g'(x) = -x$ erhalten wir

$$\int x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = -\int (-x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = -e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii)

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\log(\cos(x))$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log(x)$, $g(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = -\sin(x)$.

(iii)

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin(x))^2$$

mit $f(x) = x$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = \cos(x)$.

(iv)

$$\int x^2\sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sin(x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3)$$

mit $f(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x)$, $g(x) = x^3$ und $g'(x) = 3x^2$.

Verfahren für die Integration mittels Substitution (1)

Aufgabe: Bestimme $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ mittels Substitution $y = g(x)$.

1. $g(x)$ wird durch y ersetzt (Substitution).
2. Wegen $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ bzw. $dy = g'(x)\,dx$ wird $g'(x)\,dx$ durch dy ersetzt.
   Hier müssen wir $f(g(x))g'(x)\,dx$ komplett in y ausdrücken.
3. Das Integral $\int f(y)\,dy$ wird berechnet. Dies sollte einfacher als die Berechnung von $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ sein.
4. y wird durch $g(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Anwendung des Substitutionsverfahrens (1)

Beispiel 6.31

Bestimme $\int x^3 \sin(x^2-1)\,dx$, also $f(g(x))g'(x) = x^3 \sin(x^2-1)$.

1. Substituiere $y = x^2 - 1 =: g(x)$.
2. $\frac{dy}{dx} = g'(x) = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$, also

$$\begin{aligned} x^3 \sin(x^2-1)\,dx = x^3 \sin(x^2-1)\frac{dy}{2x} &= \frac{1}{2}x^2 \sin(x^2-1)\,dy \\ &= \frac{1}{2}(y+1)\sin(y)\,dy \end{aligned}$$

Bemerkung: $x^2 = y + 1$.

Fortsetzung Beispiel.

3. Mit partieller Integration erhalten wir

$$= \frac{1}{2}\int (y+1)\sin(y)\,dy = \frac{1}{2}(-(y+1)\cos(y) + \sin(y))$$

4. Rücksubstitution mit $y = x^2 - 1$ bzw. $y + 1 = x^2$ ergibt

$$= \frac{1}{2}(-x^2\cos(x^2-1) + \sin(x^2-1)).$$

Verfahren für die Integration mittels Substitution (2)

Aufgabe: Bestimme $\int f(x)\,dx$ mittels Substitution $x = g(y)$.

1. x wird durch $g(y)$ ersetzt (Substitution).
2. Wegen $\frac{dx}{dy} = g'(y)$ bzw. $dx = g'(y)\,dy$ wird dx durch $g'(y)\,dy$ ersetzt.
3. Das Integral $\int f(g(y))g'(y)\,dy$ wird berechnet. Dies sollte einfacher als die Berechnung von $\int f(x)\,dx$ sein.
4. y wird durch $g^{-1}(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Anwendung des Substitutionsverfahrens (2)

Beispiel 6.32

Bestimme $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1. Substituiere $x = \sin(y)$.
2. $dx = \cos(y)\,dy$, also entsteht $\int \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\,dy$.
3. Aus $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ folgt $1 - \sin^2(y) = \cos^2(y)$ und somit

$$\int \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\,dy = \int \frac{\cos(y)}{\sqrt{\cos^2(y)}}\,dy = \int 1\,dy = y$$

4. Aus $x = \sin(y)$ folgt $y = \arcsin(x)$ und somit:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

Integration von Potenzreihen

Satz 6.33

Wenn die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Konvergenzradius $R > 0$ hat, dann hat die Potenzreihe

$$F(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right) + c$$

ebenfalls den Konvergenzradius R und ist eine Stammfunktion für f.

Bemerkung: Mit Indexverschiebung und einer geeigneten Wahl für c kann $F(x)$ wieder als Reihe über x^n und ab $n = 0$ geschrieben werden.

Beispiele für die Integration von Potenzreihen

Beispiel 6.34

Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n.$$

Dann ist

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n^2 + 3n + 2)x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + c.$$

Mit Indexverschiebung und $c = 1$ erhalten wir

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Beispiel 6.35

Zur Bestimmung von $\int \sin(x^2)\,dx$ verwenden wir die Potenzreihendarstellung von $\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$. Dies ergibt

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

Also

$$\int \sin(x^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}.$$

Integration rationaler Funktionen

Beispiel 6.36

Wie bestimmen wir

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx?$$

Polynomdivision liefert

$$(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 - x - 3 + \frac{-2x + 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx &= \int x^2 - x - 3\, dx + \int \frac{-2x + 5}{x^2 - 3x + 2}\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - \int \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 2}\, dx. \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

Bleibt die Berechnung von $\int \frac{2x-5}{x^2-3x+2}\,dx$. Hier hilft eine Partialbruchzerlegung.
Nullstellen von $x^2 - 3x + 2$ sind 1 und 2, also

$$\frac{2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

Koeffizientenvergleich liefert das LGS $a + b = 2$ und $-2a - b = -5$ mit der Lösung $a = 3$ und $b = -1$. Also gilt

$$\frac{2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

Für die Brüche auf der linken Seite sind $3\log(x-1)$ bzw. $\log(x-2)$ Stammfunktionen.

Fortsetzung Beispiel.

Insgesamt erhalten wir also

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 3\log(x-1) + \log(x-2).$$

Leider ist dies nur die halbe Wahrheit, denn das Beispiel zeigt nicht, wie wir

- mit mehrfachen Nullstellen
- und komplexen Nullstellen

bei der Partialbruchzerlegung umgehen müssen.

Im Folgenden zeigen wir eine Lösung für den ersten Fall.

Bei einer mehrfachen Nullstelle a entstehen (bis auf einen Faktor) Integrale der Form

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\, dx.$$

mit $k = 1, \ldots, r$, wobei r die Vielfachheit der Nullstelle ist.

Für $k > 1$ gilt

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\, dx = \int (x-a)^{-k}\, dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}.$$

Beispiel 6.37

Wir wollen

$$\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$$

ermitteln. Das Nennerpolynom hat die einfache Nullstelle 2 und die zweifache Nullstelle 1, d. h. $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$.
Also existieren (Partialbruchzerlegung) $a,b,c\in\mathbb{R}$ mit

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}.$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 0 \\ -2a & - & 3b & + & c & = & 1 \\ a & + & 2b & - & 2c & = & 2 \end{array}$$

mit der Lösung $a=4$, $b=-4$, $c=-3$.

Fortsetzung Beispiel.

Also

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}.$$

und damit

$$\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx = 4\log(x-2) - 4\log(x-1) + \frac{3}{x-1}.$$

Uneigentliche Integrale

- Bisher: Integral auf abgeschlossenem Intervall $[a, b]$
- In vielen Fällen sind aber auch Integrale wie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

  nützlich.
- Diese Integrale beschreiben unbeschränkte Flächen. Kann der Flächeninhalt trotzdem endlich sein?
- Ja, siehe Reihen. Wert einer Reihe ist Grenzwert der Folge der Partialsummen.
- Bei Integralen: Grenzwert von Integralen über kleinere abgeschlossene Intervalle, wobei eine Intervallgrenze "wandert".
- Wie bei Reihen kann der Grenzwert existieren oder nicht.

Definition des uneigentlichen Integrals

Definition 6.38

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

Wir nennen $\int_a^b f(x)\,dx$ ein uneigentliches Integral und definieren:

(i) Falls f bei a definiert und auf $[a, b)$ Regelfunktion ist, sei

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

(ii) Falls f bei b definiert und auf $(a, b]$ Regelfunktion ist, sei

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Fortsetzung Definition.

(iii) Im Allgemeinen: Wähle $c \in (a, b)$ und definiere:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Falls der Grenzwert jeweils existiert und endlich ist, sagen wir, das uneigentliche Integral konvergiert.

Bemerkungen:

- Diese Definition ist konsistent mit der Definition “eigentlicher Integrale”.
- In (iii) ist der Wert des Integrals unabhängig von dem gewählten Zwischenpunkt c.

Beispiele uneigentlicher Integrale

Beispiel 6.39

(i)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty} 1-\frac{1}{\beta} = 1.$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \log(x)|_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty} \log(\beta) = \infty$$

Dieses uneigentliche Integral konvergiert also nicht.

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung: Für $\lambda > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} -e^{-\lambda x}\Big|_0^\beta = \lim_{\beta\to\infty} 1 - e^{-\lambda\beta} = 1$$

Mit der Exponentialverteilung modelliert man z. B. die Dauer von zufälligen Zeitintervallen.

(iv)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\searrow 0}\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\searrow 0} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\searrow 0} 2 - 2\sqrt{\alpha} = 2$$

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale

Satz 6.40

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *und* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *Regelfunktionen.*

Gilt

- $|f(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$, *und*
- $\int_a^b g(x)\, dx$ *konvergiert,*

dann konvergiert auch $\int_a^b f(x)\, dx$.

Insbesondere: Wenn $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *konvergiert, dann auch* $\int_a^b f(x)\, dx$.

Analog zu Reihen nennt man $\int_a^b f(x)\, dx$ absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konvergiert.

Anwendung des Majorantenkriteriums

Beispiel 6.41

(i) Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergiert, wegen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &\le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

In der unteren Reihe ist das linke Integral ein "eigentliches Integral" und das rechte konvergiert, siehe Beispiel 6.39.

(ii) Konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$?

Wegen $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ist die Funktion in $x=0$ stetig fortsetzbar.

1. Versuch: Es gilt $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \le \frac{1}{x}$. Aber das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ist divergent.

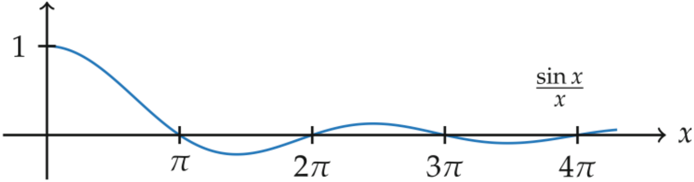
Fortsetzung Beispiel.

(ii) **2. Versuch:** Wir betrachten das Integral ab 1, verwenden zunächst die Definition der Konvergenz und integrieren partiell.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{\sin(x)}{x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x}\sin(x)\,dx \\
&= \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot(-\cos(x))\Big|_1^\beta - \int_1^\beta\left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos(x))\,dx\right) \\
&= \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}(-\cos(\beta)) + \cos(1) - \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx \\
&= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Das rechte Integral in der letzten Zeile konvergiert nach dem Majorantenkriterium. Also konvergiert auch $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$



Bemerkungen:

- $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- Ähnliches kennen wir von Reihen. So ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ auch konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- Die partielle Integration half uns, die Konvergenz nachzuweisen.

Uneigentliche Integrale und Reihen

In mancher Hinsicht sind uneigentliche Integrale und Reihen ähnlich:

- Ähnlichkeit der Definition mittels Grenzwerten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} f(t)\,dt$$

- Für $f(x) \geq 0$ existieren $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ und $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ genau dann, wenn sie (Reihe und Integral) nach oben beschränkt sind.
- Majorantenkriterium
- absolute Konvergenz impliziert Konvergenz
- Es ist häufiger einfacher die Konvergenz zu zeigen, als den Wert der Reihe bzw. des Integrals auszurechnen.

Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen

Satz 6.42

Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *eine monoton fallende und nicht negative Regelfunktion.*

Dann gilt:

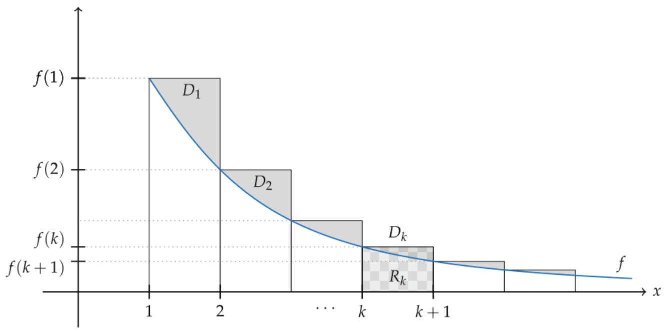
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergiert genau dann, wenn* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *konvergiert.*

(ii) *Die Folge* (a_n) *mit*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$$

konvergiert.

Beweis.



(i) folgt aus (ii), also zeigen wir (ii).

- $R_k :=$ Fläche der k-ten Säule $= f(k)$.
- $D_k := R_k - \int_k^{k+1} f(x)\,dx = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx$
- $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) = \sum_{k=1}^{n-1} D_k$

Fortsetzung Beweis.

- Weil f monoton fallend ist, folgt $f(x) \leq f(k)$ für $x \in [k, k+1]$.
- Mit der Monotonie des Integrals folgt $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq ((k+1)-k) \cdot f(k) = f(k)$.
- Damit folgt $D_k \geq 0$.
- Also ist $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k$ monoton wachsend.
- Die Gesamtfläche der D_k ist beschränkt.

  Anschauliche Begründung: Verschiebt man die Flächen für D_k alle in die linke Säule, bilden Sie dort eine disjunkte Fläche. Also $\sum_{k=1}^{\infty} D_k \leq f(1)$.

Fortsetzung Beweis.

- Formale Begründung:

$$0 \leq D_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) - f(k+1)$$

  Damit folgt

$$0 \leq a_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - f(k+1) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} f(1) - f(n)$$

- Also ist a_n auch beschränkt und damit konvergent.

Anwendungen des Integralkriteriums für Reihen

Beispiel 6.43

(i) Für $\alpha > 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Begründung: Für $\alpha > 1$ konvergiert das Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$.
Folgerung: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

ist konvergent.

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$$

ist divergent. Beweis: $\frac{1}{x \log(x)}$ ist monoton fallend für $x \geq 2$.

$$\int \frac{1}{x \log(x)}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log(x)}\, dx = \log(\log(x))$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}, F(x) = \log(x), g(x) = \log(x), g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log(x)}\, dx &= \lim_{\beta \to \infty} \int_2^{\beta} \frac{1}{x \log(x)}\, dx \\ &= \log(\log(x))\Big|_2^{\beta} \\ &= \log(\log(\beta)) - \log(\log(2)) \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Treppenfunktion: Eine Funktion, die stückweise konstant ist.
- Regelfunktion: Eine Funktion, die gleichmäßig durch eine Folge von Treppenfunktionen approximiert werden kann.
- Integral für Regelfunktionen als Grenzwert der Integrale der approximierenden Treppenfunktionen.
- Hauptsatz: Berechnung von Integralen mit Hilfe einer Stammfunktion
- Regeln zur Konstruktion einer Stammfunktion: partielle Integration, Substitution, Integration von Potenzreihen, Partialbruchzerlegung
- uneigentliche Integrale: ∞, $-\infty$ oder Polstellen als Integrationsgrenzen
- Verbindung von Reihen und uneigentlichen Integralen: Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen