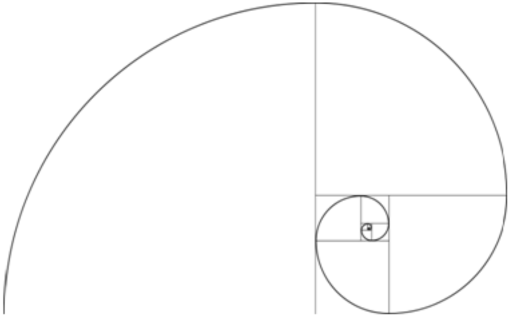
Kapitel 2

Folgen



Inhalt

Motivation

Von Intelligenztests kennen wir die Aufgabe, eine Abfolge von Zahlen fortzusetzen:

$$
\begin{aligned}
&1, 4, 9, 16, 25, \ldots \\
&2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots \\
&1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots \\
&1, 5, 7, 17, 31, 65, \ldots \\
&1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \\
&1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

Solch eine Regelmäßigkeit in der Abfolge der Zahlen drücken wir in der Mathematik durch eine Funktion aus.

Folge

Definition 2.1

Es sei M eine Menge. Eine Folge oder Zahlenfolge in M ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & M \\ & n & \mapsto & a(n). \end{array}$$

Statt $a(n)$ schreiben wir i. d. R. a_n und für diese Abbildung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ oder auch nur (a_n).

Das Element a_n heißt n-tes Folgenglied der Folge (a_n).

Für $M = \mathbb{R}$ sprechen wir von einer reellen Folge, für $M = \mathbb{C}$ von einer komplexen Folge.

Beispiele für Folgen

Beispiel 2.2

Die Folgen von Folie 96:

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \\ b_n &= n\text{-te Primzahl} \\ c_n &= (-1)^{n+1} n \\ d_n &= 2^n + (-1)^n \\ e_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ f_n &= \mathrm{i}^{n-1}. \end{aligned}$$

Rekursiv definierte Folgen

Folgen müssen nicht — wie die vorangegangenen Beispiele — explizit definiert sein, sondern können auch rekursiv definiert werden.

Definition 2.3 (Fibonacci-Folge)

Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ ist wie folgt definiert:

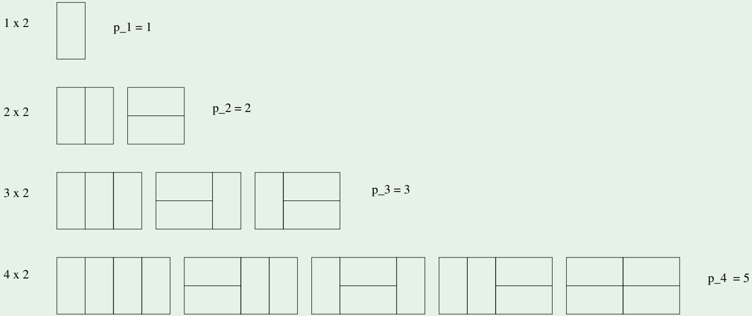
$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Typisches Problem bei der Analyse von Algorithmen:

- Ermittle eine explizite Formel für die Folgenglieder einer rekursiv definierten Folge.
- Für die Fibonacci-Folge leistet dies die Formel von Moivre-Binet.

Beispiel 2.4

Wie viele Parkettierungen p_n mit Kacheln der Größe 1×2 bzw. 2×1 gibt es für ein Feld der Größe $n \times 2$?



Also gilt

$$p_1 = 1, p_2 = 2, p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ für } n \geq 3$$

und somit $p_n = F_{n+1}$.

Formel von Moivre-Binet

Satz 2.5

Für die Fibonacci-Folge (F_n) gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Beweis.

Mittels vollständiger Induktion. □

- Der Beweis für die Korrektheit einer expliziten Formel ist i. d. R. viel einfacher als die Herleitung solch einer expliziten Formel.
- Im Verlauf der Vorlesung lernen Sie auch erste Ansätze zur Herleitung solch expliziter Formeln.

Grenzwert einer Folge

Definition 2.6

Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jeder (noch so kleinen) reellen Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

gilt.

- Im Folgenden bezeichne ϵ stets eine positive reelle Zahl und n eine natürliche Zahl.
- In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung aus Definition 2.6:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Beispiele für Grenzwerte von Folgen

Beispiel 2.7

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 0.

   Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ (nach Archimedischem Prinzip möglich).
   Damit folgt für alle $n \geq n_0$:
   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

2. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := 1 - \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 1.
   Wegen
   $$|b_n - 1| = |1 - \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$$
   verläuft der Beweis analog zur Folge (a_n).

Fortsetzung Beispiel.

3. Die Folge (c_n) mit $c_n := q^n$ hat für alle $0 < q < 1$ den Grenzwert 0. Dies folgt direkt aus Satz 1.27 (ii).
4. Die Folge (d_n) mit $d_n := \sqrt[n]{K}$ hat für alle $K \geq 1$ den Grenzwert 1.
   Beweis: Für $x_n := \sqrt[n]{K} - 1$ ergibt die Bernoullische Ungleichung

$$K = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n.$$

   Damit folgt $x_n < \frac{K}{n}$ und es gilt

$$\left|\sqrt[n]{K} - 1\right| = x_n < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 > \frac{K}{\epsilon}.$$

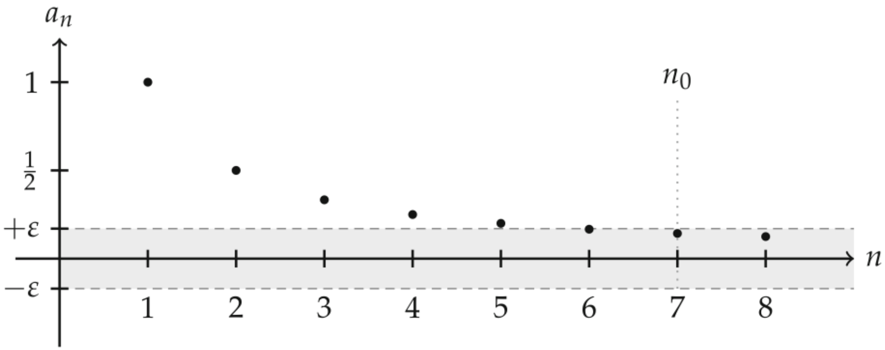
Mathe $\longleftrightarrow$ Deutsch

$\forall \epsilon > 0$	Für jeden noch so schmalen Streifen
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	gibt es einen Index n_0,
$\forall n \geq n_0$	so dass ab diesem Index n_0 alle Folgenglieder
$\lvert a_n - a \rvert < \epsilon$	in diesem Streifen um a herum liegen.

- Wie hängt typischerweise n_0 von ϵ ab?
- Genauer: Was passiert mit n_0, wenn ϵ kleiner wird?

Veranschaulichung der Grenzwertdefinition

$a_n = \frac{1}{n}$



Negation der Grenzwertdefintion (1)

Aus den mathematischen Grundlagen kennen Sie (strenge) prädikatenlogische Formeln der Form

$$\forall x\, A(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x\, A(x).$$

Die Formel

$$\forall x > 0 : A(x)$$

entspricht eigentlich nicht der strengen Syntax der Prädikatenlogik. Sie ist eine Kurzform für

$$\forall x\, (x > 0 \rightarrow A(x)).$$

Wie lautet die Negation dieser Formel?

Negation der Grenzwertdefintion (2)

Negation:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall x\,(x > 0 \to A(x))) \\
\equiv \quad & \exists x\,\neg(x > 0 \to A(x)) \\
\equiv \quad & \exists x\,\neg(\neg(x > 0) \vee A(x)) \\
\equiv \quad & \exists x\,(x > 0 \wedge \neg A(x)) \\
\equiv \quad & \exists x > 0 : \neg A(x)
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Charakterisierung für "a ist nicht Grenzwert der Folge (a_n)":

$$\exists \epsilon > 0\,\forall n_0 \in \mathbb{N}\,\exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon$$

Konvergenz

Definition 2.8

Die reelle Folge (a_n) heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Wenn (a_n) nicht konvergent ist, dann heißt (a_n) divergent.

- In Quantorenschreibweise lautet konvergent

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

- und dementsprechend divergent

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \epsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon.$$

Beispiele für divergente Folgen

Beispiel 2.9

1. Die Folge (a_n) mit $a_n = q^n$ ist für alle $q > 1$ divergent. Dies folgt direkt aus Satz 1.27 (i).
2. Die Folge (b_n) mit $b_n = (-1)^n$ ist divergent.

   Beweis:

   - Für jedes $a \notin \{1, -1\}$ gilt mit $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{|a-1|, |a+1]\} > 0$, dass $|a_n - a| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also kommen nur 1 und -1 als Grenzwert in Frage.
   - Sei $a = 1$. Wähle $\epsilon = 1$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $n = 2n_0 + 1$. Damit gilt

     $$|a_n - a| = |(-1)^{2n_0+1} - 1| = |-1-1| = 2 \geq \epsilon = 1.$$

   - Analog für $a = -1$: Wähle hier $n = 2n_0$.

Eindeutigkeit von Grenzwerten

Satz 2.10

Es sei (a_n) eine konvergente Folge und a und a' seien Grenzwerte von (a_n).

Dann gilt $a = a'$.

Damit ist der Grenzwert einer konvergenten Folge stets eindeutig bestimmt.

Definition 2.11

Für den (eindeutigen) Grenzwert a einer Folge (a_n) schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Weitere geläufige Schreibweise: $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beweis.

Es sei (a_n) eine konvergente Folge und sowohl a als auch a' sei ein Grenzwert von (a_n).

Ann.: $a \neq a'$. Dann ist $|a - a'| > 0$. Wir wählen $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|a - a'|$. Dann existieren n_1 und n_2 mit

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1 &: |a_n - a| < \epsilon \\ \forall n \geq n_2 &: |a_n - a'| < \epsilon. \end{aligned}$$

Für $n \geq \max\{n_1, n_2\} =: n_0$ folgt

$$\begin{aligned} |a - a'| &= |a - a_n + a_n - a'| \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - a'| \\ &< 2\epsilon \\ &< |a - a'| \end{aligned}$$

Widerspruch! Also gilt $a = a'$. □

Beschränktheit

Definition 2.12

Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

(i) (a_n) heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) (a_n) heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt,so dass $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) (a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}_+$ gibt (also $K > 0$), so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine beschränkte Folge ist stets sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Warum?

Beispiele für beschränkte Folgen

Beispiel 2.13

Die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ mit

$$\begin{aligned}
a_n &:= (-1)^n \\
b_n &:= \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
c_n &:= (-1)^n(1 - q^n) \text{ mit } 0 < q < 1
\end{aligned}$$

sind alle beschränkt und divergent.

Konvergente Folgen sind beschränkt

Satz 2.14

Jede konvergente reelle Zahlenfolge (a_n) ist beschränkt.

Beweis.

Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

N.V. existiert n_0 mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a + a| \\ &\leq |a_n - a| + |a| \\ &\leq 1 + |a|. \end{aligned}$$

Setze $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$. Damit gilt dann $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Rechenregeln für Grenzwerte

Satz 2.15

Es seien (a_n) *und* (b_n) *konvergente Folgen in* $\mathbb{R}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:*

(i) *Die Folge* $(a_n \pm b_n)$ *ist konvergent mit Grenzwert* $a \pm b$.

(ii) *Die Folge* (λa_n) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist konvergent mit Grenzwert* λa.

(iii) *Die Folge* $(a_n b_n)$ *ist konvergent mit Grenzwert* ab.

(iv) *Wenn* $a \neq 0$ *ist, dann existiert ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *ist.*

Die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0}$ *ist dann konvergent mit Grenzwert* $\frac{1}{a}$.

(v) *Die Folge* $(|a_n|)$ *ist konvergent mit Grenzwert* $|a|$.

Beweis von (i).

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Weil die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent sind mit den Grenzwerten a und b gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq n_1$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq n_2$$

Wähle $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Werkzeug für Grenzwertbeweise

Lemma 2.16

Es sei (a_n) eine reelle Folge.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) (a_n) *ist konvergent mit Grenzwert* a.

(ii)
$$\exists \kappa > 0 \, \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \kappa\epsilon.$$

Nach Satz 2.16 genügt es, $|a_n - a| < \kappa\epsilon$ für irgendein positives und von ϵ unabhängiges κ zu zeigen, um damit auf Konvergenz schließen zu können.

Beweis.

(i)$\Rightarrow$(ii): Mit $\kappa = 1$ entspricht (ii) der Grenzwertdefinition.

(ii)$\Rightarrow$(i): Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $\epsilon' := \frac{\epsilon}{\kappa}$. Nach (ii) existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \kappa\epsilon'$. Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \kappa\epsilon' \\ &= \kappa\frac{\epsilon}{\kappa} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.16 werden Grenzwertbeweise einfacher, weil wir nun nicht mehr umständlich ein n_0 konstruieren müssen, um damit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ zu zeigen.

Wir werden Lemma 2.16 in vielen zukünftigen Beweisen nutzen.

Beweis von Satz 2.15 (iii)

Man beachte: Als konvergente Folge ist (b_n) beschränkt, d. h. es existiert ein $B > 0$ mit $|b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) und (b_n) konvergent sind, existieren n_1 und n_2 mit $|a_n - a| < \epsilon$ bzw. $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq n_1$ bzw. $n \geq n_2$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\
&\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\
&= |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \\
&= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\
&< B\epsilon + |a|\epsilon \quad \text{für } n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\} \\
&= (B + |a|)\epsilon.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.16 folgt, dass ab Grenzwert der Folge $(a_n b_n)$ ist.

Beweis von Satz 2.15 (ii), (iv), (v)

Übungsaufgabe.

Folgerung 2.17

Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

- *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Folge $\left(a_n^k\right)$ konvergent mit Grenzwert a^k.*
- *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ eine Nullfolge.*

Beweis.

Übungsaufgabe.

Anwendung der Grenzwertregeln

Beispiel 2.18

Wir betrachten die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (d_n) mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \\ b_n &= (3 + 10^{-n}) \cdot \frac{1}{2^{n-3}} \\ c_n &= \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1} \\ d_n &= \frac{-5n + 1}{4n^2 - 7}. \end{aligned}$$

Tafel ✎.

Bestimmte Divergenz

Definition 2.19

Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

Wir sagen, dass (a_n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert (in Zeichen: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$), wenn es zu jeder Konstanten $M > 0$ ein n_0 gibt, so dass $a_n > M$ für alle $n \geq n_0$ ist.

Wir nennen (a_n) bestimmt divergent gegen $-\infty$ (in Zeichen: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), wenn die Folge $(-a_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Beispiele für bestimmte Divergenz

Beispiel 2.20

Wir betrachten die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (d_n) mit

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \\ b_n &= -n^2 \\ c_n &= (-1)^n \cdot n^2 \\ d_n &= n + (-1)^n \end{aligned}$$

$(a_n), (b_n), (d_n)$ sind bestimmt divergent, (c_n) nicht.

Rechenregeln für bestimmte Divergenz

Wir können Satz 2.15 auch für bestimmt divergente Folgen verwenden, wenn wir dabei die folgenden Regeln berücksichtigen:

$$
\begin{aligned}
c \pm \infty &= \pm\infty \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \\
\pm c \cdot \infty &= \pm\infty \quad \text{für } c > 0 \\
\pm c \cdot (-\infty) &= \mp\infty \quad \text{für } c > 0 \\
\frac{c}{\pm\infty} &= 0 \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \\
\infty + \infty &= \infty \\
-\infty - \infty &= -\infty \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
-\infty \cdot \infty &= -\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= \infty
\end{aligned}
$$

Unbestimmte Verknüpfungen bei bestimmter Divergenz

Folgende Verknüpfungen mit ∞ können wir nicht ohne weitere Untersuchung vereinfachen:

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}.$$

Wenn wir auf einen dieser Ausdrücke stoßen, müssen wir die Folge so lange umformen, bis wir entscheiden können, ob sie konvergent oder divergent ist.

Konvergenzkriterien

- Um die Konvergenz einer Folge mittels Ihrer Definition oder den Rechenregeln zu zeigen, benötigen wir den Grenzwert der Folge.
- Häufig kennen wir den Grenzwert aber nicht.
- Wir betrachten nun Kriterien, mit denen wir die Konvergenz einer Folge zeigen können, ohne deren Grenzwert zu kennen.

Beispiel 2.21

Es sei

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Wir wollen die Folge (a_n) auf Konvergenz untersuchen. Es sieht so aus, als sei diese Folge konvergent.

n	1	2	3	5	10	20	50	100	1000
a_n	2	2.250	2.370	2.488	2.594	2.653	2.692	2.704	2.717

Aber wie können wir Konvergenz zeigen, wenn wir den Grenzwert nicht kennen?

$\leq$ bei Folgengliedern setzt sich auf Grenzwerte fort

Satz 2.22

Es seien (a_n) und (b_n) reelle, konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis.

Wir definieren:

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b := \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ann.: $a > b$.

Dann wählen wir $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. N.V. existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \epsilon$$

Für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$a_n > a - \epsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \epsilon > b_n.$$

Widerspruch!

Schachtelungsprinzip

Satz 2.23

Es seien (a_n), (b_n), (c_n) *reelle Zahlenfolgen mit* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Weiterhin seien* (a_n) *und* (c_n) *konvergent mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Dann ist auch die Folge (b_n) *konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Beweis.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. N.V. existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_2 : |c_n - a| < \epsilon$$

Es sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Wegen

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon$$

folgt dann auch $|b_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Anwendung des Schachtelungsprinzips

Beispiel 2.24

Für die Folge (a_n) mit $a_n := (5 + (-1)^n)\frac{1}{n}$ gilt

$$\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{6}{n}}_{\to 0}.$$

Nach dem Schachtelungsprinzip folgt

$$\lim_{n\to\infty} (5 + (-1)^n)\frac{1}{n} = 0.$$

Weiteres Beispiel: Folge (b_n) mit $b_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n}$. Tafel ✎.

Monotonie

Definition 2.25

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt

- monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Satz von der monotonen Konvergenz

Satz 2.26

Jede beschränkte, monotone reelle Zahlenfolge (a_n) ist konvergent.

Beweis.

O.B.d.A. sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt.

Es sei $a := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen, dass a der Grenzwert von (a_n) ist.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Lemma 1.23 existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$. Da die Folge monoton wachsend ist, folgt für alle $n \geq n_0$:

$$a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a.$$

und damit $|a_n - a| < \epsilon$.

Anwendungen monotoner Konvergenz

Beispiel 2.27

Wir setzen Beispiel 2.21 fort.

- Die Folge a_n mit

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

  ist monoton wachsend.

- Die Folge b_n mit

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$$

  ist monoton fallend.

Fortsetzung Beispiel.

- Wegen
$$a_1 \leq a_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = b_n \leq b_1$$
sind (a_n) und (b_n) beschränkt.
- Also sind nach Satz 2.26 beide Folgen konvergent (mit Grenzwert a bzw. b).
- Wegen
$$b_n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{a_n}_{\to a}$$
haben beide Folgen aber den gleichen Grenzwert, also $a = b$.
- Zur Information: Dieser gemeinsame Grenzwert ist die Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2.7182818284\ldots$.
- Wir werden e später über eine andere Folge definieren.

Konstruktiver Wurzelbeweis

Satz 2.28

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$. Die Folge (x_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_n &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

definiert.

Dann ist die Folge (x_n) konvergent und für ihren Grenzwert x gilt $x > 0$ und $x^2 = a$.

Bemerkung: Die in Satz 2.28 definierte Folge (x_n) heißt Heron'sche Folge.

Beweis.

Durch Induktion sieht man sofort, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
x_n^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - \frac{4a}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2x_n}}_{\geq 0} \underbrace{\left(x_n^2 - a\right)}_{\geq 0} \geq 0
\end{aligned}
$$

Also ist $(x_n)_{n\geq 2}$ monoton fallend und beschränkt und damit konvergent mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Fortsetzung Beweis.

Aus der Definition der Folge ergibt sich

$$x_n x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n^2 + a\right).$$

Da die Folge (x_{n+1}) den gleichen Grenzwert wie die Folge (x_n) hat ergibt sich für die Grenzwerte der linken und rechten Seite

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + a\right)$$

und damit $x^2 = a$.

Implementierung der Heron'schen Folge

$x' := a$
do
$\quad x := x'$
$\quad x' := \frac{1}{2}\left(x' + \frac{a}{x'}\right)$
while $x' \neq x$
return x

Fehlerabschätzung und Konvergenzgeschwindigkeit

Für den Fehler

$$f_n := x_n - \sqrt{a}$$

erhält man mit der Definition der Heron'schen Folge $f_{n+1} = \frac{1}{2x_n} f_n^2$ und wegen $x_n \geq \sqrt{a}$ weiterhin

$$|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2.$$

Damit liegt bei der Heron'schen Folge quadratische Konvergenz vor.

Allgemein ist eine Folge (a_n) mit Grenzwert a quadratisch konvergent, wenn eine Konstante K existiert mit

$$|a_{n+1} - a| \leq K \cdot |a_n - a|^2.$$

Konstruktion k-ter Wurzeln

Satz 2.29

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$. Die Folge (x_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_n &= \frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

definiert.

Dann ist die Folge (x_n) konvergent und für ihren Grenzwert x gilt $x > 0$ und $x^k = a$.

Intervalle

Definition 2.30

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir nennen die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

das abgeschlossene Intervall von a bis b, die Menge

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

das linksoffene Intervall von a bis b, die Menge

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

das rechtsoffene Intervall von a bis b und die Menge

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

das offene Intervall von a bis b.

Intervallschachtelung

Satz 2.31

Es seien (x_n) und (y_n) reelle Folgen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : I_n := [x_n, y_n] \neq \emptyset$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subseteq I_n$ *und*

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - x_n = 0.$

Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in [x_n, y_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- (a) ist äquivalent zu: $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) ist äquivalent zu: $x_n \leq x_{n+1} \wedge y_{n+1} \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Aus (b) folgt, dass (x_n) monoton wächst und (y_n) monoton fällt. Wegen (a) gilt weiterhin für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1.$$

Damit sind die Folgen auch beschränkt und somit konvergent mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to} y_n$.

Aus (c) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} y_n - x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= y - x \end{aligned}$$

woraus wiederum $y = x =: a$ folgt. Für a wiederum gilt $x_n \leq a \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel 2.32

Für $a \in \mathbb{R}_+$ konstruieren wir (x_n) und (y_n) und eine Hilfsfolge (z_n) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
y_1 &= a \\
z_n &= \frac{1}{2}(x_n + y_n) \quad \text{für } n \geq 1 \\
x_n &= \begin{cases} x_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 \geq a \\ z_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 < a \end{cases} \quad \text{für } n \geq 2 \\
y_n &= \begin{cases} z_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 \geq a \\ y_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 < a \end{cases} \quad \text{für } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Dann bilden die Folgen (x_n) und (y_n) eine Intervallschachtelung mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{a}.$$

Teilfolge

Definition 2.33

Es sei (a_n) eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 < n_2 < \ldots$.

Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ Teilfolge der Folge (a_n).

Beispiel 2.34

- Für $n_k = 2k-1$ erhalten wir die Teilfolge $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$ der ungeraden Folgenglieder und
- dementsprechend für $n_k = 2k$ die Teilfolge $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ der geraden Folgenglieder.
- $n_k = k$-te Primzahl ergibt die Teilfolge $a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, \ldots$ mit einer Primzahl als Index.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz 2.35

Jede beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis.

N.V. gibt es $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $([A_k, B_K])_{k \in \mathbb{N}}$ von Intervallen und eine Folge (n_k) natürlicher Zahlen, so dass für alle k die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) In $I_k := [A_k, B_k]$ liegen unendlich viele Folgenglieder von (a_n),

(ii) $[A_{k+1}, B_{k+1}] \subseteq [A_k, B_k]$,

(iii) $B_{k+1} - A_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k - A_k)$,

(iv) $n_{k+1} > n_k$,

(v) $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Fortsetzung Beweis.

$k = 1$: Wir definieren:

$$A_1 := A, \quad B_1 := B, \quad n_1 := 1$$

$k \to k + 1$:

- Sind $I_k = [A_k, B_k]$ und n_k bereits konstruiert, so ist $M_k := \dfrac{A_k + B_k}{2}$ die Mitte des Intervalls I_k.
- Wegen (i) liegen in $[A_k, M_k]$ oder in $[M_k, B_k]$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n). Es sei $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ solch ein Intervall mit unendlich vielen Folgengliedern.
- Mit dieser Konstruktion sind (i) bis (iii) erfüllt.

Fortsetzung Beweis.

- Da $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n) enthält, gibt es ein $n > n_k$ mit $a_n \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$.
- Es sei n_{k+1} das kleinste solche n. Damit sind (iv) und (v) erfüllt.
- Nach Satz 2.31 (Intervallschachtelung) folgt: Es existiert genau ein a, dass in allen Intervallen I_k liegt.
- Damit konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen dieses a.

Cauchy-Folge

Definition 2.36

Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Bemerkungen:

- Wir werden gleich sehen, dass eine reelle Folge genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn sie konvergent ist.
- Da bei der Definition einer Cauchy-Folge aber kein Grenzwert auftritt, haben wir mit der Definition der Cauchy-Folge ein weiteres Konvergenzkriterium ohne Grenzwert.

Cauchy-Folgen sind beschränkt

Lemma 2.37

Jede reelle Cauchy-Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis.

N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < 1$.

Damit erhalten wir für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \\ &\leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \\ &< 1 + |a_{n_0}|. \end{aligned}$$

Setze $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Konvergenz $\Leftrightarrow$ Cauchy-Folge

Satz 2.38

Es sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt: (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Folge

(a_n) sei eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Beweis: Cauchy-Folge $\Rightarrow$ konvergent

Es sei (a_n) eine Cauchy-Folge.

Nach Lemma 2.37 ist (a_n) beschränkt. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt, dass (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) hat. Es sei a der Grenzwert dieser Teilfolge. Wir zeigen jetzt, dass a auch der Grenzwert von (a_n) ist.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da (a_{n_k}) gegen a konvergiert, existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ für alle $n_k \geq N_1$.

Aus der Cauchy-Eigenschaft von (a_n) folgt, dass ein $N_2 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N_2$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Es sei $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$. Weiterhin wählen wir ein beliebiges n_k mit $n_k \geq N_0$. Damit gilt dann:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\epsilon$$

für alle $n \geq N_0$.

Grenzwert einer komplexen Zahlenfolge

- Auch für die komplexen Zahlen haben wir einen Betrag definiert.
- Die Grenzwertdefinition 2.6 stützt sich nur auf den Betrag.
- Daher können wir die Grenzwertdefinition auf die komplexen Zahlen ausdehnen.

Definition 2.39

Es sei (a_n) eine komplexe Zahlenfolge.

Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$

$$\left| a_n - a \right| < \epsilon$$

gilt.

Grenzwert komplexer Folgen

Lemma 2.40

Es sei (a_n) *eine komplexe Folge und* $a \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \wedge \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a).$$

Beweis.

Übungsaufgabe. $\square$

Beschränkte komplexe Folgen

- Da $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist, existiert keine Ordnungsrelation $\leq$ für die komplexen Zahlen.
- Daher macht es keinen Sinn, für komplexe Folgen von einer Beschränkung nach oben oder unten zu reden.
- Wir können aber den Begriff beschränkt auf komplexe Folgen übertragen.

Definition 2.41

Eine komplexe Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq M$$

gilt.

Auf komplexe Folgen übertragbare Aussagen

Alle Aussagen über reelle Folgen, die im Beweis nicht die Anordnung der reellen Zahlen ausnutzen, können wir auf komplexe Folgen übertragen. Dies sind insbesondere

- die Eindeutigkeit von Grenzwerten, Satz 2.10,
- die Beschränktheit konvergenter Folgen, Satz 2.14,
- die Rechenregeln für Grenzwerte, Satz 2.15,
- das Werkzeug für Grenzwertbeweise, Lemma 2.16 und
- die Aussagen über Cauchy-Folgen, Lemma 2.37, Satz 2.38.

Konvention

Viele Aussagen lassen sich sowohl für die reellen als auch für die komplexen Zahlen formulieren.

Konvention:

- Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir sowohl den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als auch den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
- Innerhalb einer Definition oder eines Satzes wird mit $\mathbb{K}$ aber stets derselbe Körper bezeichnet.

Konvergenz in höherdimensionalen Räumen

Definition 2.42

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Bei einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^d$ ist jedes Folgenglied ein d-Tupel in $\mathbb{K}^d$, also

$$a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(d)}).$$

Die Folge (a_n) in $\mathbb{K}^d$ konvergiert genau dann gegen

$$a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(d)}) \in \mathbb{K}^d,$$

wenn für jede Komponentenfolge $(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ für $i = 1, \ldots, d$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)}.$$

Beispiel 2.43

Die Folge

$$\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $(0,1)$, denn

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} &= 0\\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= 1.\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Da wir jede Folge in $\mathbb{C}$ auch als Folge in $\mathbb{R}^2$ auffassen können, haben wir mit Definition 2.39 und Definition 2.42 zwei Konvergenzdefinitionen für komplexe Folgen.
- Wegen Lemma 2.40 sind diese Definitionen aber äquivalent.

Zusammenfassung

- Konvergenz, Grenzwert: $\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
- Rechenregeln für Grenzwerte
- Bestimmte Divergenz
- Konvergenzkriterien: Schachtelung, Monotonie und Beschränktheit, Intervallschachtelung, Satz von Bolzano-Weierstraß, Cauchy-Folgen
- Konvergenz in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^d$ komponentenweise