Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Analysis
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Sommersemester 2016
21. April 2016

Beweis für die Monotonie der Exponentialfolge

Wir wollen zeigen, dass die Folge (a_n) mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

monoton wachsend ist. Gemäß Definition bedeutet monoton wachsend:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies müssen wir also nachweisen.

Offensichtlich gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Für den Nachweis der Monotonie nutzen wir nun die rechte Ungleichung.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die Bernoullische Ungleichung an. Mit dieser folgt:

$$\geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \frac{n+2}{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\\
&= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3}\\
&= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3}\\
&= \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3}\\
&= 1+\frac{1}{(n+1)^3}\\
&> 1
\end{aligned}
$$

In analoger Weise könnten wir nun auch noch zeigen, dass die Folge (b_n) mit

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$$

monoton fallend ist.