Kapitel 7

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
H_f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Inhalt

Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

z. B.

$$f(x, y) = x^2 + 2y$$

oder

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 - 5x_3 + x_2 x_3.$$

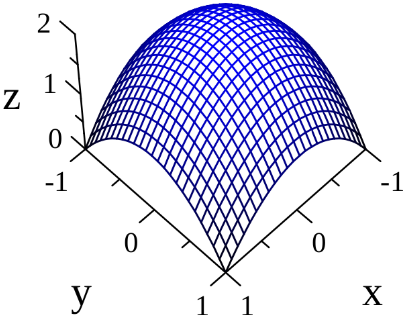
- Solche Funktionen heißen skalarwertige Funktionen, da der Funktionswert ein Skalar ist.
- In erster Linie interessiert uns dabei die Differenzierbarkeit solcher Funktionen.
- Beachten Sie: Der Begriff der Stetigkeit für solche Funktionen ist durch Definition 4.1 bereits abgedeckt.

Graphische Darstellung

Wie können wir den Funktionsgraphen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darstellen?

1. Als Fläche im Raum
   Der Funktionswert $z = f(x, y)$ wird als Höhe über dem durch (x, y) gegebenen Punkt der Ebene abgetragen.

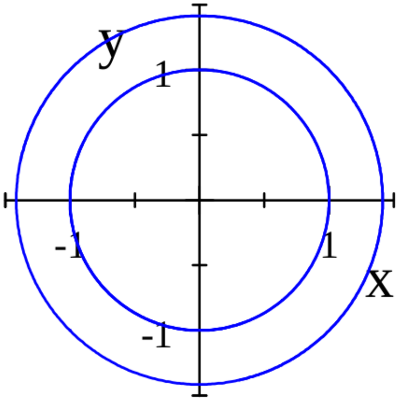
Beispiel: $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$



2. Als Höhenliniendiagramm
   Bereiche mit gleichen Funktionswerten $z = f(x, y)$ werden durch eine Isolinie gekennzeichnet.

Beispiel: $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$
Schnitte parallel zur x, y-Ebene:

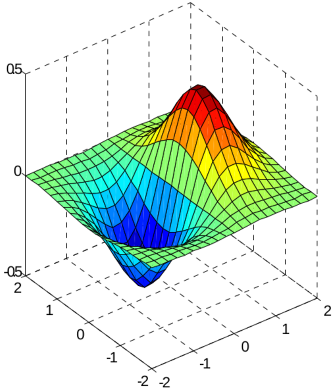
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2$$
$$z = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

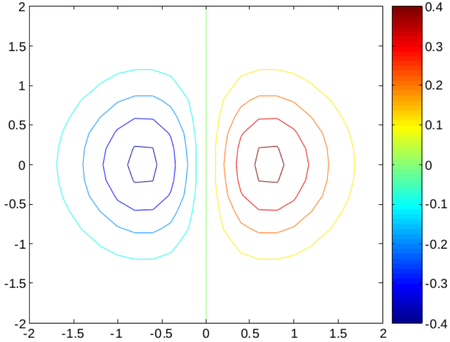


Häufig werden zusätzlich Farben eingesetzt, um die verschiedenen Höhen zu unterscheiden.

Beispiel:

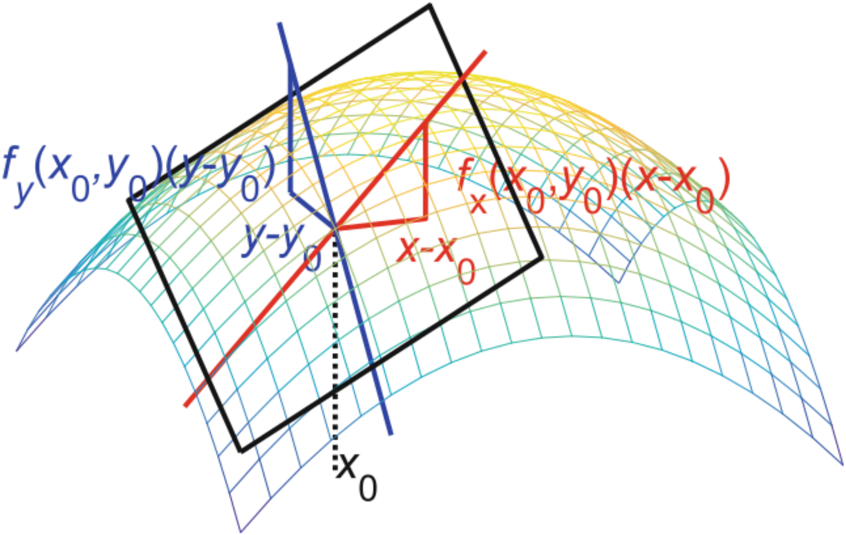
$$f(x, y) = x \cdot e^{-x^2-y^2}$$





Tangentialebene

- Wir wollen den Begriff der Differenzierbarkeit auf Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erweitern.
- Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $\hat{x} \in D$, wenn dort eine eindeutige Tangente gebildet werden kann.
- Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Wir müssen in $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ eine Tangentialebene bilden können.
- Dies entspricht einer Linearisierung der Funktion in $\hat{\mathbf{x}}$.
- Die Tangentialebene wird dann aufgespannt durch die Tangente in x- und die Tangente in y-Richtung im Punkte $\hat{\mathbf{x}}$.


$f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$
$y-y_0$
$x-x_0$
x_0

Fragen

1. Wie stark steigt die Tangentialebene an, wenn man sich in einem Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung der x-Achse bewegt?
2. Wie stark steigt die Tangentialebene an, wenn man sich in einem Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung der y-Achse bewegt?
3. Wie stark steigt die Tangentialebene an, wenn man sich diagonal bewegt, z. B. nach „Nordost“ oder „Süd-Südwest“?
4. In welche Richtung muss man gehen, um den steilsten Anstieg zu haben?

Partielle Ableitung für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. partielle Ableitung nach x (y wird als konstant aufgefasst) in $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x}+h, \hat{y}) - f(\hat{x}, \hat{y})}{h} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{x=\hat{x}, y=\hat{y}} = \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{y})$$

   Weitere Schreibweise: $f_x(\hat{x}, \hat{y})$

2. partielle Ableitung nach y (x wird als konstant aufgefasst) in $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x}, \hat{y}+h) - f(\hat{x}, \hat{y})}{h} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{x=\hat{x}, y=\hat{y}} = \frac{\partial}{\partial y} f(\hat{x}, \hat{y})$$

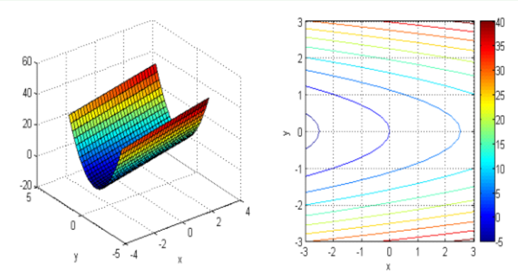
   Weitere Schreibweise: $f_y(\hat{x}, \hat{y})$

Beispiel 7.1

Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = 2x + y^2$.

1. $$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + y^2 - (2x + y^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

2. $$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{2x + (y+h)^2 - (2x + y^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2yh + h^2}{h} = 2y$$



Richtungsableitung

3. Richtungsableitung in Richtung eines Vektors $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ mit $\|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 1$ in $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$f_{\mathbf{r}}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x} + h \cdot r_1, \hat{y} + h \cdot r_2) - f(\hat{x}, \hat{y})}{h}$$

Bemerkungen:

- Die definierten Grenzwerte (1), (2), (3) existieren u. U. nicht.
- (1) und (2) sind Spezialfälle von (3).
- Für die partielle Differentation gelten die gleichen Regeln (Summen-, Produkt-, Quotienten, Kettenregel) wie für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen.

Verallgemeinerung auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- partielle Ableitung nach der Variablen x_i in Punkt $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} f_{x_i}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x_1}, \ldots, \widehat{x_{i-1}}, \hat{x_i} + h, \widehat{x_{i+1}}, \ldots, \hat{x_n}) - f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})}{h} \end{aligned}$$

- Richtungsableitung in Richtung des Vektors $\mathbf{r}$ in Punkt $\hat{\mathbf{x}}$:

$$f_{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x_1} + h \cdot r_1, \ldots, \hat{x_n} + h \cdot r_n) - f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})}{h}$$

Auch hier muss $\|\mathbf{r}\|_2 = 1$ gelten.

Gradient

- Existieren die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach x_i für $i = 1, \ldots, n$ im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$, dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

  Gradient von f im Punkte $\hat{\mathbf{x}}$.
- Als Bezeichnung für den Gradienten wird auch das Symbol

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$$

  verwendet.
- Der Gradient ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$.

Richtungsableitung und Gradient

Die Richtungsableitung lässt sich mithilfe des Gradienten berechnen.

- Für einen Richtungsvektor $\mathbf{r}$ mit $\|\mathbf{r}\|_2 = 1$ gilt

$$f_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{r}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle.$$

- Da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in den Argumenten ist, erhalten wir für einen Richtungsvektor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ die allgemeine Formel

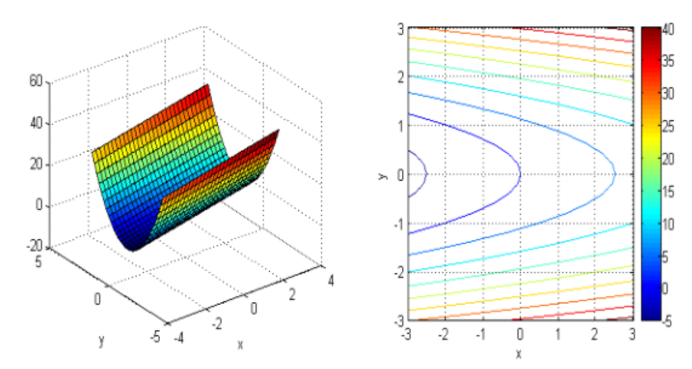
$$f_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|_2} \langle \mathbf{r}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x})\|_2 \cdot \cos(\alpha),$$

wobei α den durch die Vektoren $\mathbf{r}$ und $\nabla f(\mathbf{x})$ aufgepannten Winkel bezeichnet.

Beispiel 7.2

Wir betrachten wieder die Funktion $f(x, y) = 2x + y^2$.

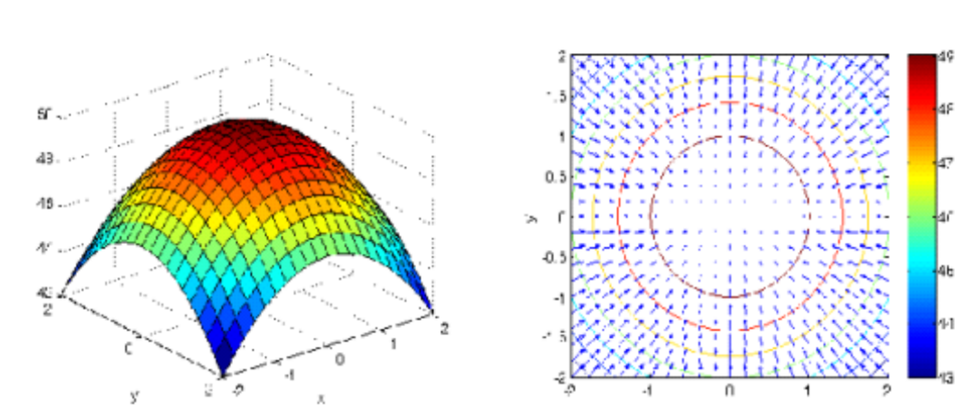
- In welche Richtung steigt die Funktion im Punkte $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ am stärksten?
- Wie hoch ist dieser Anstieg?



Beispiel 7.3

Wir betrachten $f(x, y) = 50 - x^2 - y^2$.

Richtung des steilsten Anstiegs/Abstiegs?



Partielle Ableitungen höherer Ordnung

- Partielle Ableitungen erster Ordnung sind meistens wieder Funktionen der unabhängigen Variablen, z. B.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = 10x^2y^3 \quad &\Rightarrow \quad f_x(x,y) = 20xy^3 \\
&\Rightarrow \quad f_y(x,y) = 30x^2y^2
\end{aligned}
$$

- Nochmalige partielle Ableitung führt zu partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.
- partielle Ableitugen zweiter Ordnung für $f(x,y)$:
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial x} f$ nach x: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} = f_{xx}$
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial x} f$ nach y: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = f_{xy}$
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial y} f$ nach x: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = f_{yx}$
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial y} f$ nach y: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = f_{yy}$
- Sind die partiellen Ableitungen bis einschließlich der betrachteten Ordnung stetig, dann ist die Reihenfolge der Differentiation vertauschbar. Z. B. gilt dann $f_{xy} = f_{yx}$.

Hesse-Matrix

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt die Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \partial x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Beispiel 7.4

Für $f(x, y) = 50 - x^2 - y^2$ erhalten wir $f_x(x, y) = -2x$ und $f_y = -2y$ und somit

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Konvexität

- Funktionseigenschaften in Zusammenhang mit der Krümmung: Konvexität, Konkavität
- Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ auch die Strecke zwischen diesen beiden Punkten in D enthalten ist.

$$D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist konvex } :\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \forall \lambda \in [0,1] : \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in D.$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}$.

  f ist konvex $:\Leftrightarrow$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

- f ist konkav, wenn $-f$ konvex ist.
- f ist streng konvex (konkav), wenn für alle $\lambda \in (0,1)$ die Ungleichung strikt gilt.

Definitheit von Matrizen

- Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv (semi-)definit, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$$

- Gilt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$$

  dann ist $\mathbf{A}$ negativ (semi-)definit.
- Existieren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} < 0,$$

  so ist $\mathbf{A}$ indefinit.

Krümmung und Hesse Matrix

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann (streng) konvex auf D, wenn die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x})$ positv semidefinit (definit) für alle $\mathbf{x} \in D$ ist.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann (streng) konkav auf D, wenn die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x})$ negativ semidefinit (definit) für alle $\mathbf{x} \in D$ ist.

Beispiel 7.5

Für $f(x, y) = 50 - x^2 - y^2$ gilt

$$H_f(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{x}^T H_f(\hat{x}, \hat{y})\mathbf{x} = -2x_1^2 - 2x_2^2 < 0 \text{ für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Also ist f streng konkav auf $\mathbb{R}^2$.

Kriterien für Definitheit: Eigenwerte

Satz 7.6

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Dann gilt:

- **A** *ist positiv definit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$.
- **A** *ist positiv semidefinit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.
- **A** *ist negativ definit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$.
- **A** *ist negativ semidefinit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$.
- **A** *ist indefinit* $\Leftrightarrow$ *es existieren ein* $\lambda_i > 0$ *und ein* $\lambda_j < 0$.

Kriterien für Definitheit: Hauptminoren

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann heißt

$$\det(\mathbf{A}_k) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

der k-te Hauptminor (oder k-te Hauptabschnittsdeterminante) von $\mathbf{A}$.

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann

- positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind, also $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ für $k = 1, \dots, n$,
- negativ definit, wenn $(-1)^k \det(\mathbf{A}_k) > 0$ für $k = 1, \dots, n$ gilt.
- Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und keiner der beiden Fälle trifft zu, dann ist $\mathbf{A}$ indefinit.

Lokales Maximum und lokales Minimum

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

- Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ heißt lokales Maximum, wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \epsilon \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\hat{\mathbf{x}}).$$

- Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ heißt lokales Minimum, wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \epsilon \Rightarrow f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}).$$

Bemerkungen:

- Anschaulich: in einer kleinen Umgebung von $\hat{\mathbf{x}}$ mit Radius ϵ gibt es keinen größeren (kleineren) Funktionswert.
- Die genaue Norm spielt hier keine Rolle, da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen in einem gewissen Sinne äquivalent sind.

Notwendige Bedingung für lokales Extremum

- In einem lokalen Extremum darf es keine Richtung geben, in der eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wächst.
- Also müssen alle Richtungsableitungen $= 0$ sein.
- Somit insbesondere die partiellen Ableitungen.
- Damit erhalten wir als notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

- Dies ist ein u. U. nichtlineares Gleichungssystem in n Variablen.

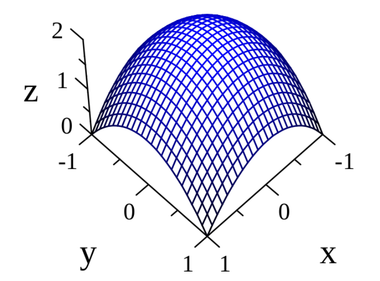
Beispiel 7.7

Für $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ erhalten wir

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Damit ergibt sich $x = y = 0$ als einziger Kandidat für einen Extremwert.

An der Graphik sehen wir, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.



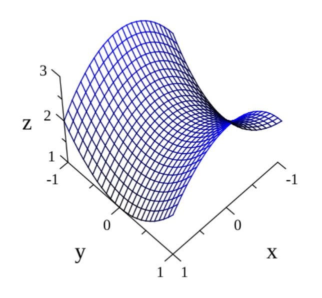
Beispiel 7.8

Auch für die Funktion $f(x,y) = 2 - x^2 + y^2$ ist die Bedingung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

in $x = y = 0$ erfüllt.

Hier handelt es sich aber um einen Sattelpunkt.



Hinreichende Bedingungen für Minimum/Maximum

- Die Krümmung muss in einem stationären Punkt ($\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) in alle Richtungen gleichartig sein, d. h. in alle Richtungen konvex oder in alle Richtungen konkav.
- In einem Sattelpunkt ist dies nicht der Fall.
- Die Art der Krümmung können wir mithilfe der Hesse-Matrix ermitteln.
- Genauer:
  - Wir bestimmen die Eigenwerte der Hesse-Matrix oder
  - wir wenden das Hauptminorenkriterium an.

Beispiel 7.9

1. Für $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Dies ist eine Diagonalmatrix, die Diagonalelemente sind die Eigenwerte, also ist die Matrix negativ definit.
   Somit liegt ein Maximum vor.

2. Für $f(x,y) = 2 - x^2 + y^2$ ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Wir haben Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen, also indefinit, also Sattelpunkt.

Beispiel 7.10

Sei $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. Wir erhalten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

und damit $x = y = 0$ als einzigen stationären Punkt.
Wir bilden die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist diese Matrix positiv definit, also liegt ein Minimum vor.

Beispiel 7.11

Sei $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$. Wir erhalten

$$\nabla f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1-2x^2 \\ -2xy \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Stationäre Punkte: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0$.
Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^3-6x & 4x^2y-2y \\ 4x^2y-2y & 4y^2x-2x \end{pmatrix}$$

Einsetzen ergibt:

- $H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ist negativ definit, also Maximum.
- $H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ist positiv definit, also Minimum.

Beispiel 7.12

Sei $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 - 6$. Wir erhalten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x_1 - 4x_2 - 10 \\ -4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8 \\ 4x_2 + 14x_3 + 14 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Stationärer Punkt: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$.
Hesse-Matrix:

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Das Hauptminorenkriterium liefert, dass diese Matrix positiv definit ist, also liegt ein Minimum vor.

Zusammenfassung

- partielle Ableitungen und Richtungsableitung
- Richtungsableitung kann aus den partiellen Ableitungen berechnet werden.
- Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs
- zweite partielle Ableitungen: Hesse-Matrix
- notwenige Bedingung für Extremum: $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
- Art des stationären Punkts: Definitheit der Hesse-Matrix
- Wie Definitheit bestimmen? Eigenwerte oder Hauptminorenkriterium