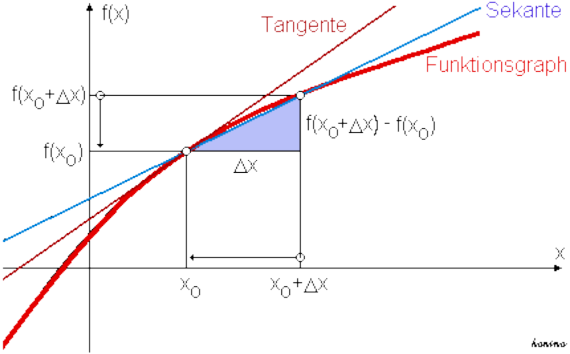
Kapitel 5

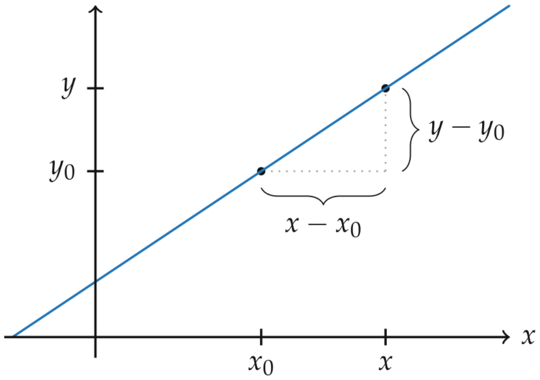
Differenzierbarkeit und Taylorentwicklung



Inhalt

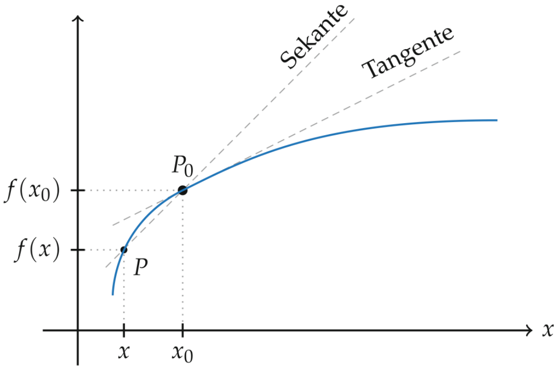
Vorüberlegung: Steigung einer Geraden

- Steigung s einer Geraden ermittelbar mit zwei beliebigen Punkten (x, y) und (x_0, y_0):
$$s = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
- Geradengleichung: $x \mapsto y_0 + s(x - x_0)$



Vorüberlegung: Tangente

- Für eine Funktion f wollen wir eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ legen.
- Um die Steigung der Tangente zu ermitteln, legen wir Sekanten durch P_0 und einen Punkt $P = (x, f(x))$ und lassen x gegen x_0 gehen.
- Die Steigung der Tangente ergibt sich dann als Grenzwert der Sekantensteigungen.



Definition der Ableitung

Definition 5.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.

Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Wir nennen dann $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0, und die Gerade durch den Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

f heißt auf I differenzierbar, wenn f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Bemerkungen zur Ableitung

- Zum Rechnen ist manchmal die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  besser geeignet.
- Die Tangente entspricht der Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Für einen Randpunkt des Intervalls I ist der Grenzwert als einseitiger Grenzwert zu verstehen.

Differenzenquotient und Differentialquotient

- Den Quotienten
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
bezeichnet man auch als Differenzenquotienten.
- Der Differenzenquotient ist die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.
- Die Ableitung $f'(x_0)$ ist also der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$.
- Diesen Grenzwert, also die Ableitung $f'(x_0)$, bezeichnet man auch als Differentialquotienten an der Stelle x_0.

Beispiele

Beispiel 5.2

In den folgenden Beispielen gelte stets $I = \mathbb{R}$.

(i) Es sei $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

Also $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $f(x) = c \cdot x$. Dann erhalten wir

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c \cdot (x_0 + h) - c \cdot x_0}{h} = \frac{ch}{h} = c.$$

Also $f'(x_0) = c$.

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Es sei $f(x) = x^2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2x_0.\end{aligned}$$

Also $f'(x_0) = 2x_0$.

Fortsetzung Beispiel.

(iv) Es sei $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$. Dann folgt

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h \geq 0 \\ -1 & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

Also

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -1$$

Da die beiden Grenzwert unterschiedlich sind, existiert der Grenzwert für $h \to 0$ nicht.

Der Funktionsgraph hat im Punkt $(0,0)$ keine Tangente, da er dort eine “Ecke” aufweist.

Links- und rechtsseitige Ableitung (1)

Definition 5.3

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.

$$f'(x_0+) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt rechtsseitige Ableitung,

$$f'(x_0-) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt linksseitige Ableitung von f in x_0.

Links- und rechtsseitige Ableitung (2)

Lemma 5.4

Es existiere ein $\epsilon > 0$ *mit* $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq I$.

Dann ist f *in* x_0 *genau dann differenzierbar, wenn links- und rechtsseitige Ableitungen existieren und gleich sind.*

Differenzierbarkeit ist stärker als Stetigkeit

Satz 5.5

Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann ist f auch stetig in x_0.

Beweis.

Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}
$$

also $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ableitung als momentane Änderungsrate

Die Ableitung $f'(x_0)$ lässt sich als momentane Änderungsrate von f bei x_0 interpretieren.

Beispiel: x bezeichne die Zeit und $f(x)$ die zurückgelegte Strecke eines Fahrzeugs zum Zeitpunkt x. Dann ist

- $f(x) - f(x_0)$ die Strecke, die im Zeitraum von x_0 bis x zurückgelegt wurde,
- $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum und
- $f'(x_0)$ die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0.

Linearität der Ableitung

Satz 5.6

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$.

(i) *Sind f und g differenzierbar in x_0, dann ist auch die Funktion $f + g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) *Ist f differenzierbar in x_0 und $c \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Funktion $c \cdot f$ differenzierbar in x_0 und es gilt*

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Beweis.

Folgt direkt aus den Grenzwertregeln. $\square$

Beispiel 5.7

Es sei $f(x) = 4x^2 - 7x + 5$.

Dann folgt gemäß Beispiel 5.2 und den Linearitätsregeln dass f differenzierbar ist und es gilt

$$f'(x_0) = 4 \cdot 2x_0 - 7 + 0 = 8x_0 - 7.$$

Produkt- und Quotientenregel

Satz 5.8

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

(i) *Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(ii) *Gilt $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Beweis der Produktregel.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}$$

- Die Brüche sind die Differenzenquotienten von f und g an der Stelle x_0. N.V. existieren deren Grenzwerte für $x \to x_0$ und sind gleich $f'(x_0)$ bzw. $g'(x_0)$.
- $f(x_0)$ ist ein konstanter Faktor.
- Da g differenzierbar in x_0 ist, ist g dort auch stetig, d. h. es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Fortsetzung Beweis der Produktregel.

Mit den Grenzwertregeln folgt

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

Beweis der Quotientenregel ist Übungsaufgabe.

Schreibweisen

- Zur Vereinfachung schreiben wir x statt x_0, wenn es nicht zur Verwirrung führt. Insbesondere also $f'(x)$.
- Beispiel: Für $f(x) = x^2$ gilt also $f'(x) = 2x$.
- In der Literatur findet man noch weitere Schreibweisen:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = D\,f = \dot{x}(t)$$

Beispiel 5.9

- Speziallfall der Quotientenregeln: Dort wo f differenzierbar und ungleich Null ist, gilt

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

- Für $n \in \mathbb{Z}$ und $f(x) = x^n$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.
  - $n = 0$: Siehe Beispiel 5.2.
  - $n > 0$: Nachweis mit vollständiger Induktion und Produktregel.
  - $n < 0$: $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ und dann Spezialfall der Quotientenregeln anwenden.

Kettenregel

Satz 5.10

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $x_0 \in I$ und $g : I \to J$ und $f : J \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Wenn g in x_0 und f in $g(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist auch $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Zur Erinnerung:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Beweisskizze.

Die folgende Rechnung deutet die Herleitung der Formel an, ist aber kein korrekter Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}
$$

für $y_0 := g(x_0)$ und $y := g(x)$. Wenn wir jetzt für beide Faktoren die Grenzwerte bilden, erhalten wir $f'(y_0) \cdot g'(x_0)$ bzw. mit $y_0 = g(x_0)$ die Formel $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Beispiel 5.11

Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wie lautet $f'(x)$?

Sei

$$g(x) = 1 + x^2 \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{y}.$$

Dann ist

$$g'(x) = 2x \quad \text{und} \quad h'(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

und damit $f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x))$. Mit der Kettenregel ergibt sich

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 5.12

Sei

- $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $y_0 \in I$,
- $f : I \to \mathbb{R}$ *eine streng monotone und stetige Funktion, die in* y_0 *differenzierbar ist,*
- $I' = f(I)$ *und* $f^{-1} : I' \to I$ *die Umkehrfunktion von* f.

Dann ist f^{-1} *genau dann differenzierbar in* $x_0 := f(y_0)$, *wenn* $f'(y_0) \neq 0$ *gilt, mit*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Beweisskizze.

Setzt man voraus, dass f^{-1} differenzierbar ist, ergibt sich die Formel für die Ableitung aus der Kettenregel. Aus

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

folgt durch Ableitung beider Seiten (links mit der Kettenregel)

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

und damit $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Dies ist aber nur eine Begründung für die Formel und kein Beweis von Satz 5.12, denn die Differenzierbarkeit von f^{-1} müsste vorher gezeigt werden.

Beispiel 5.13

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(y) = y^2$. Dann ist $I = I' = [0, \infty)$.

Auflösen von $x = y^2$ nach y gibt $y = \sqrt{x}$. Wegen $x \in [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist hier die zweite Lösung $-\sqrt{x}$ nicht relevant. Es folgt $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Es gilt $f'(y) = 2y$. Damit haben wir $f'(0) = 0$ und f^{-1} ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Für $y > 0$ ist $f'(y) \neq 0$, also

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Damit kennen wir jetzt die Ableitung der Wurzelfunktion.

Ableitung einer Potenzreihe

Satz 5.14

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *habe den Konvergenzradius* $R > 0$.

- *Dann hat auch die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *den Konvergenzradius* R.
- *Für alle* x *mit* $|x| < R$ *gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Bemerkungen zur Ableitung von Potenzreihen

- Wir dürfen also die Grenzwerte vertauschen:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' .$$

- Die rechte Summe beginnt wegen $(a_0 x^0)' = 0$ erst bei $n = 1$.
- Satz 5.14 ist eine Folgerung aus dem allgemeineren Satz 5.16. deshalb hier kein Beweis.
- Satz 5.14 erlaubt es uns, für viele wichtige Funktionen die Ableitung zu bestimmen (siehe folgende Beispiele).

Beispiel 5.15

- Ableitung der Exponentialfunktion: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$(\exp(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

- Ableitung des Logarithmus: Mit $f(x) = \exp(x)$ folgt $\log(x) = f^{-1}(x)$ und damit nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(\log(x))' = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

Fortsetzung Beispiel.

- Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion: Sei $a > 0$. Für $f(x) = a^x$ liefert uns die Kettenregel

$$(a^x)' = (\exp(\log(a) \cdot x))' = \exp(\log(a) \cdot x) \cdot \log(a) = a^x \cdot \log(a).$$

- Ableitung der allgemeinen Potenz: Sei $b \in \mathbb{R}$. Für $f(x) = x^b$ liefert uns die Kettenregel

$$\left(x^b\right)' = (\exp(\log(x) \cdot b))' = \exp(\log(x) \cdot b) \cdot \frac{b}{x} = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}.$$

Fortsetzung Beispiel.

- Ableitung des Cosinus:

$$
\begin{aligned}
(cos(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= (-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

Ableitung und Funktionenfolgen

Satz 5.16

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn

- *die Folge $(f_n(x_0))$ für ein $x_0 \in I$ konvergiert und*
- *die Funktionenfolge (f_n') gleichmäßig gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert,*

dann konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f und es gilt $f' = g = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

Wir können also wieder die Grenzwerte vertauschen:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beweisskizze zu Satz 5.14

- Wegen
$$\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^{n+1}}{na_nx^n}\right| = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$$
haben beide Potenzreihen den gleichen Konvergenzradius.
- Die abgeleitete Reihe konvergiert für $x = 0$ (gegen a_1).
- Potenzreihen konvergieren innerhalb des Konvergenzradius gleichmäßig gegen die Grenzfunktion, also auch die abgeleitete Reihe.

Beispiel 5.17

In Beispiel 3.30 haben wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes der geometrischen Reihe mit sich selbst gezeigt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Mit Hilfe von Satz 5.16 gelingt dieser Nachweis deutlich einfacher.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n
\end{aligned}$$

Beispiel 5.18

Aus dem Beispiel 3.34 wissen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Mit Satz 5.16 folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{6}{(1-x)^4} = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)x^n)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n.\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

Definition 5.19

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

Wenn die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls auf I differenzierbar ist, dann heißt f zweimal differenzierbar auf I und wir schreiben

$$f''(x) := (f')'(x).$$

Die Funktion f'' ist die zweite Ableitung von f.

Allgemein definieren wir die n-te Ableitung $f^{(n)}$ (falls existent) für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f, \\ f^{(n)} &:= (f^{(n-1)})' \text{ für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Beispiel 5.20

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht zweimal differenzierbar.

- f ist für $x \neq 0$ differenzierbar, weil die Funktionen x^2 und $-x^2$ differenzierbar sind.
- f ist in $x = 0$ differenzierbar, weil linke und rechte Ableitung existieren und identisch sind: $f'(0-) = 0 = f'(0+)$.
- $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

  Damit ist f' in 0 nicht differenzierbar, da linke und rechte Ableitung von f' in 0 ungleich sind: $f''(0-) = -2 \neq 2 = f''(0+)$.

Unendlich oft differenzierbar

Definition 5.21

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt unendlich oft differenzierbar, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf I existiert.

Beispiel 5.22

- Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius R ist unendlich oft differenzierbar für $|x| < R$. Dies folgt durch n-fache Anwendung von Satz 5.14.
- Exponentialfunktion, Logarithmus, Sinus, Cosinus und die Potenzfunktion x^b sind alle unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ bzw. $(0, \infty)$. Dies folgt aus den in Beispiel 5.15 hergeleiteten Formeln.
- Polynome sind unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel folgt für $f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n\,x^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)\,x^{n-2} \\
&\vdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\,x = n!\,x \\
f^{(n)} &= n! \\
f^{(n+1)} &= f^{(n+2)} = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Extrema

Definition 5.23

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

(i) x_0 heißt globales Maximum bzw. globales Minimum, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x).$$

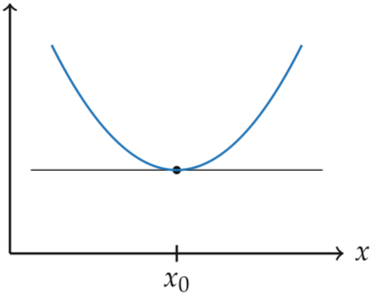
(ii) x_0 heißt lokales Maximum bzw. lokales Minimum von f, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \quad |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

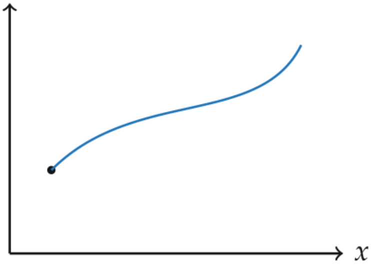
(iii) x_0 ist globales Extremum, wenn x_0 globales Minimum oder Maximum ist.

(iv) x_0 ist lokales Extremum, wenn x_0 lokales Minimum oder Maximum ist.

Extrema und Ableitung (1)



Minimum im Inneren des Definitionsbereiches



Minimum am Rand des Definitionsbereiches

Bemerkung: x_0 heißt innerer Punkt von D gdw. ein $\epsilon > 0$ existiert mit $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$.

Extrema und Ableitung (2)

Satz 5.24

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D differenzierbare Funktion und x_0 sei ein innerer Punkt von D. Dann gilt:

$$x_0 \text{ ist lokales Extremum } \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Beweis.

- O.B.d.A. betrachten wir ein lokales Minimum: Es existiert also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$.
- Für ein $x \in D$ mit $x_0 - \epsilon < x < x_0$ folgt daher

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Fortsetzung Beweis.

- Für ein $x \in D$ mit $x_0 < x < x_0 + \epsilon$ folgt
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$
- Wenn f differenzierbar und x_0 ein innerer Punkt ist, müssen die rechts- und linksseitige Ableitung in x_0 existieren. Aus obigen Ungleichungen folgt:
$$f'(x_0+) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \geq \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0-).$$
- Wenn f differenzierbar ist, müssen rechts- und linksseitige Ableitung aber identisch ein. Somit folgt
$$f'(x_0) = f'(x_0+) = 0 = f'(x_0-).$$

Beispiel 5.25

Welches Rechteck mit einem Umfang 2 hat maximale, welches minimale Fläche?

- Seien x und y die Seitenlängen. Der Umfang ist dann $2x + 2y = 2$. Daraus folgt $y = 1 - x$.
- Der Flächeninhalt beträgt $xy = x(1 - x)$. Wir müssen also die Extrema der Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x(1 - x)$ bestimmen.
- Es gilt $f(0) = f(1) = 0$ und $f(x) > 0$ für $0 < x < 1$. Also sind 0 und 1 globale Minima.
- Da f stetig ist, muss f in einem Punkt $0 < x < 1$ ein globales Maximum haben.
- Das globale Maximum muss auch lokales Maximum sein. Da f auf $[0, 1]$ differenzierbar ist, muss im Maximum $f'(x) = 1 - 2x = 0$ gelten. Hieraus folgt $x = \frac{1}{2}$ als eindeutige Lösung.
- Also ist $x = \frac{1}{2}$ das Maximum von f.

Stationäre Punkte

Bemerkung: $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum (bei einer differenzierbaren Funktion).

Definition 5.26

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$.

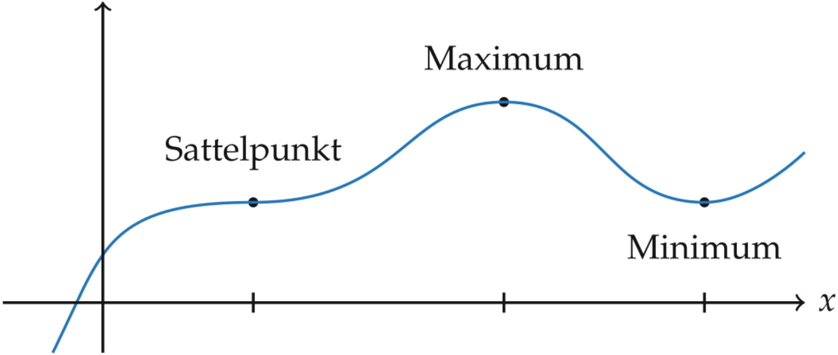
x_0 heißt stationärer Punkt von f, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt.

Ein stationärer Punkt x_0 heißt Sattelpunkt, wenn x_0 ein innerer Punkt ist und ein $\epsilon > 0$ existiert (mit $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$), so dass die folgenden Bedingungen gelten:

- Für alle $x_0 - \epsilon < x < x_0$ gilt $f(x) < f(x_0)$ und
- für alle $x_0 < x < x_0 + \epsilon$ gilt $f(x) > f(x_0)$

oder umgekehrt.

Sattelpunkt, Maximum, Minimum



Satz von Rolle

Lemma 5.27

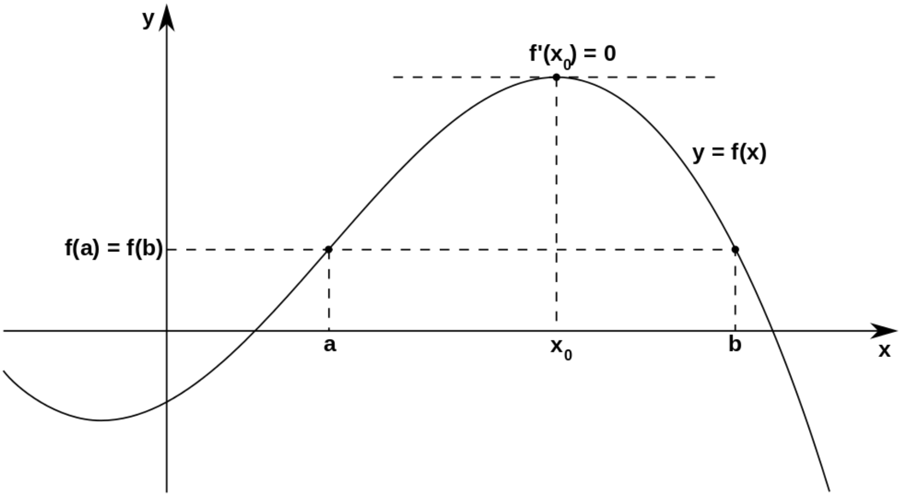
Sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine auf* $[a, b]$ *stetige und auf* (a, b) *differenzierbare Funktion mit* $f(a) = f(b)$.

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Beweis.

- Wenn $f(x)$ konstant ist, dann folgt $f'(x) = 0$ und der Satz ist für diesen Fall beweisen. Wir können daher f als nicht konstant voraussetzen.
- Wenn f nicht konstant ist, existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. O.B.d.A. gelte $f(x_0) > f(a)$.
- Da f stetig auf $[a, b]$ ist, hat f ein Maximum ξ mit $\xi \in (a, b)$, denn $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$.
- Da f auf (a, b) differenzierbar, folgt mit Satz 5.24 $f'(\xi) = 0$.

Veranschaulichung des Satzes von Rolle



Mittelwertsatz

Satz 5.28

Sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine auf* $[a, b]$ *stetige und auf* (a, b) *differenzierbare Funktion.*

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

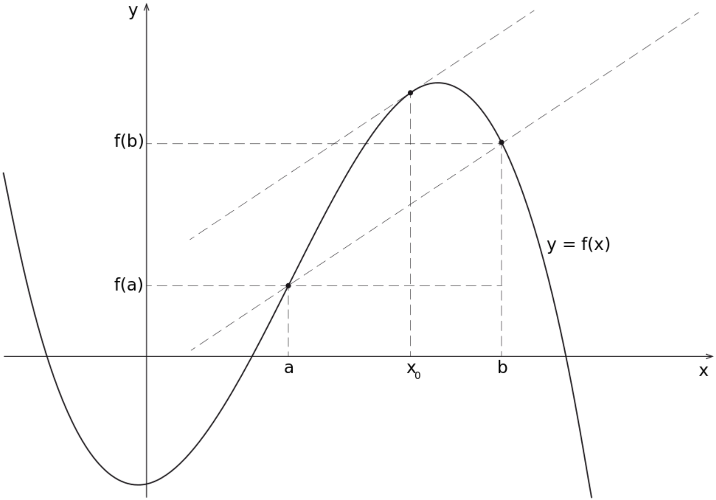
Beweis.

Wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

an.

Veranschaulichung des Mittelwertsatzes



Ableitung und Monotonie

Satz 5.29

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion.

Dann gilt:

(i) $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *ist konstant.*

(ii) $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *ist monoton wachsend.*

(iii) $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Rightarrow f$ *ist streng monoton wachsend.*

(iv) $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *ist monoton fallend.*

(v) $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Rightarrow f$ *ist streng monoton fallend.*

Bemerkung: Für (iii) und (v) gelten die Umkehrschlüsse nicht. Bspw. ist $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Beweis.

(i) "$\Leftarrow$": Für eine konstante Funktion f gilt $f'(x) = 0$, siehe Beispiel 5.2 (ii).

"$\Rightarrow$": Mit dem Mittelwertsatz folgt für alle $x \in (a, b)$:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0.$$

Also $f(x) = f(a)$ für alle $x \in (a, b)$.

Fortsetzung Beweis.

(ii) "$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} f \text{ monoton wachsend} &\implies x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \\ &\implies x < x' \Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0 \\ &\implies \lim_{x' \searrow x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0 \\ &\implies f'(x) \geq 0. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Sei $x' > x$. Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$f(x') - f(x) = f'(\xi)(x' - x) \geq 0.$$

Also $f(x') \geq f(x)$.

- (iii) bis (v): analog.

Beispiel 5.30

- $f(x) = \log(x)$ ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend, da $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ für $x > 0$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend, denn $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ für $x \neq 0$.

  Beachten Sie aber, dass $f(x)$ nicht auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ monoton fallend ist.
- $f(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 14$ ist streng monoton wachsend, da

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 33 = 3(x^2 - 6x + 11) = 3\left((x-3)^2 + 2\right) > 0.$$

Monotonie und Extrema/Sattelpunkte

Monotonieüberlegungen erlauben es uns manchmal zu entscheiden, welche spezielle Form (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) ein stationärer Punkt hat.

Beispiel 5.31

Sei $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$. Dann folgt

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}(1-x)^2.$$

Einziger stationärer Punkt ist $x_0 = 1$. Dies muss ein Sattelpunkt sein, da $f'(x) > 0$ für alle $x \neq 1$, also f sowohl links als auch rechts von x_0 streng monoton wachsend ist.

Ableitung und Grenzwertberechnungen

- Mit elementaren Methoden lässt sich der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$$

  für $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht so ohne weiteres bestimmen.
- Sehr hilfreich ist in solchen Situationen die Regel von L'Hospital.
- Diese erlaubt es uns, bei Zähler und Nenner zu den Ableitungen überzugehen und
- den gesuchten Grenzwert als Grenzwert des Quotienten der Ableitungen zu bestimmen.

Regel von L'Hospital

Satz 5.32

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$ *und* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Wenn einer der beiden folgenden Bedingungen

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *und* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

erfüllt ist, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die analoge Aussage gilt für $x \to b$.

Beweisidee.

Wir betrachten die erste der beiden Bedingungen.

Wenn f und g differenzierbar sind, sind sie auch stetig und es gilt $f(a) = g(a) = 0$. Also

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Für $x \to a$ konvergieren Zähler und Nenner gegen $f'(a)$ bzw. $g'(a)$. Für $g'(a) \neq 0$ folgt somit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Beispiel 5.33

(i)

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

(ii) Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x\log(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} x\log(x)) = \exp(0) = 1.$$

(iii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

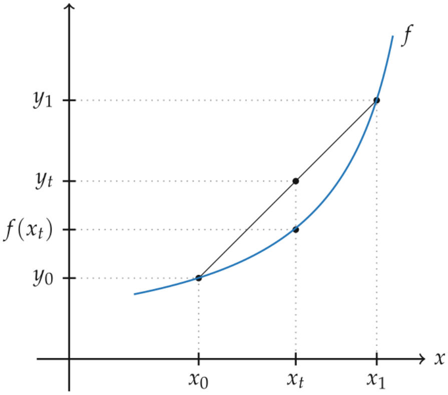
Hier haben wir die Regel von L'Hospital zweimal angewendet.

Konvexität

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist konvex, wenn die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten $x, y \in M$ vollständig in M liegt.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist konvex, wenn die Menge der Punkte, die oberhalb des Funktionsgraphen liegen, eine konvexe Menge ist.
- Menge oberhalb des Funktionsgraphen:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D \wedge y \geq f(x)\}.$$

- Andere anschauliche Charakterisierung: Jede Sehne des Funktionsgraphen verläuft oberhalb des Graphen.



Konvexe Funktion

Definition 5.34

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

f heißt konvex auf I, falls für alle $x_0, x_1 \in I$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1).$$

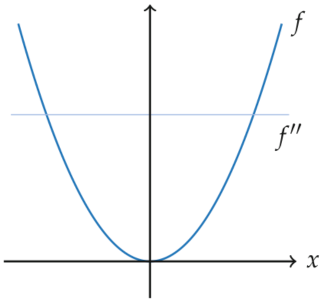
f heißt streng konvex, falls die Ungleichung für alle $\lambda \in (0, 1)$ strikt ist (also $<$ gilt).

f heißt (streng) konkav, falls das umgekehrte Ungleichheitszeichen gilt.

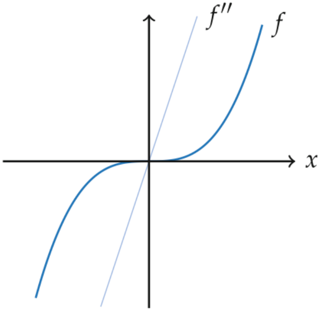
Beispiel 5.35

- Die Funktion $f(x) = x^2$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$.
- Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf $(-\infty, 0)$ streng konkav und auf $(0, \infty)$ streng konvex.
- Die Funktion $f(x) = \log(x)$ ist streng konkav auf $(0, \infty)$.

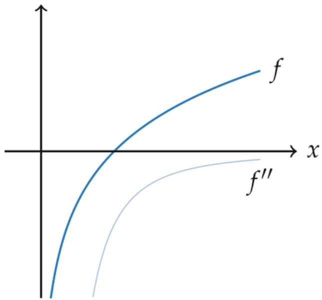
Anschauliche Begründung: siehe nächste Folie.



$f(x) = x^2$, $f''(x) = 2$



$f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$



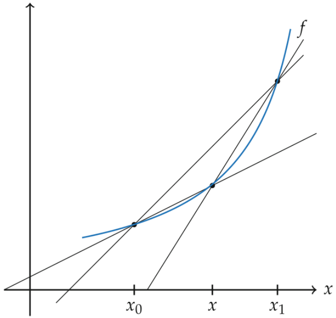
$f(x) = \log(x)$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

Konvexitätskriterien (1)

Lemma 5.36

Eine Funktion f ist genau dann konvex, wenn für alle $x_0, x, x_1 \in I$ mit $x_0 < x < x_1$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$



Beweis.

Für $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ mit $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & \leq & (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \\ \Leftrightarrow & f(x) - f(x_0) & \leq & \lambda(f(x_1) - f(x_0)). \end{array}$$

Es gilt außerdem $x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0)$. Teile nun beide Seiten der Ungleichung.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Die Konvexitätsbedingung ist also äquivalent zur linken Ungleichung im Lemma. Analog zeigt man auch die Äquivalenz mit der rechten Ungleichung. $\square$

Konvexitätskriterien (2)

Lemma 5.37

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann konvex auf $[a, b]$, wenn f' auf (a, b) monoton wachsend ist.

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei f konvex und seien $x_0, x_1 \in (a, b)$ mit $x_0 < x_1$.

- Mit Lemma 5.36 folgt für ein beliebiges $x \in (x_0, x_1)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

- Für $x \searrow x_0$ einerseits und $x \nearrow x_1$ andererseits folgt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \lim_{x \nearrow x_1} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x_1).$$

Fortsetzung Beweis.

- Also gilt $x_0 < x_1 \Rightarrow f'(x_0) \leq f'(x_1)$.
- Damit ist f' monoton wachsend.

$\Leftarrow$: Sei f' monoton wachsend. Wir zeigen, dass f das Konvexitätskriterium aus Lemma 5.36 erfüllt.

- Seien $x_0, x, x_1 \in [a, b]$ mit $x_0 < x < x_1$.
- Nach dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (x_0, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_1)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_1) \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\xi_2).$$

- Wegen $\xi_1 < \xi_2$ und dem monoton Wachstum von f' ist damit das Kriterium aus Lemma 5.36 erfüllt.

Konvexitätskriterien (3)

Bei zweimal differenzierbaren Funktion ist das folgende Kriterium sehr hilfreich.

Folgerung 5.38

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f \text{ ist konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in D \\
f \text{ ist konkav} \quad &\Leftrightarrow \quad f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in D \\
f \text{ ist streng konvex} \quad &\Leftarrow \quad f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in D \\
f \text{ ist streng konkav} \quad &\Leftarrow \quad f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in D
\end{aligned}$$

Beweis.

$f'' \geq 0$ ist äquivalent mit f' ist monoton wachsend. $\square$

Beispiel 5.39

Mit Satz 5.38 können wir die Aussagen aus Beispiel 5.35 formal nachweisen.

- Für $f(x) = x^2$ gilt $f''(x) = 2 > 0$. Also ist f streng konvex auf $\mathbb{R}$.
- Für $f(x) = x^3$ gilt $f''(x) = 6x$, also $f''(x) < 0$ für $x \in (-\infty, 0)$ und $f''(x) > 0$ für $x \in (0, \infty)$.
- Für $f(x) = \log(x)$ gilt $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Also ist f streng konkav auf $(0, \infty)$.

Konvexität und Ungleichungen

Mit Hilfe konvexer oder konkaver Funktionen lassen sich viele hilfreiche Ungleichungen beweisen.

Beispiel 5.40

Die Ungleichung vom artihmetischen und quadratischen Mittel: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Beweis: $f(x) = x^2$ ist konvex. Wähle $\lambda = \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.41

Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel: Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Beweis: $f(x) = \log(x)$ ist konkav. Wähle $\lambda = \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\frac{\log(a) + \log(b)}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Mit der strengen Monotonie der Exponentialfunktion folgt:

$$\exp\left(\frac{\log(a) + \log(b)}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2} \quad \Rightarrow \quad \exp(\frac{1}{2}\log(a))\exp(\frac{1}{2}\log(b)) \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Motivation: Approximation (1)

Können wir auf einfache Weise eine gute Näherung für $\sqrt{1.1}$ berechnen? Es gilt offensichtlich $1 < \sqrt{1.1} < 1.1$. Geht es genauer?

Idee: Die Tangente $T(x)$ an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ im Punkt $x_0 = 1$ ist nahe $x_0 = 1$ eine gute Approximation.

- Approximiere $f(1.1)$ durch $T(1.1)$.
- $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Mit $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ folgt für $x = 1.1$: $T(1.1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 1.05$.
- Diese Näherung ist ziemlich gut. Laut Taschenrechner gilt $\sqrt{1.1} = 1.0488088\ldots$.

Motivation: Approximation (2)

Folgende Fragen drängen sich auf:

- Wie können wir die Approximation verbessern?
- Wie können wir sicher sein, dass der Approximationsfehler klein ist, ohne den genauen Wert für $f(x)$ zu kennen?

Idee zur ersten Frage: Potenzreihen.

- Wenn sich die zu approximierende Funktion $f(x)$ als Potenzreihe schreiben lässt, dann wird $f(x)$ durch die Partialsummen approximiert.

Motivation: Approximation (3)

Aber woher bekommen wir die Koeffizienten a_n für die Potenzreihe?

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + \cdots \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} = 1 \cdot a_1 + \cdots \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n (x-x_0)^{n-2} = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-x_0)^{n-k} = k! \cdot a_k + \cdots
\end{aligned}
$$

Also $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$ und demnach $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Taylor-Polynom

Definition 5.42

Sei D ein Intervall, $x_0 \in D$, $n \in \mathbb{N}_0$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar auf D.

Dann ist

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots \\
&\qquad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

das n-te Taylerpolynom von f bei x_0.

Beispiel 5.43

Sei $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und $x_0 = 1$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

also

$$f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

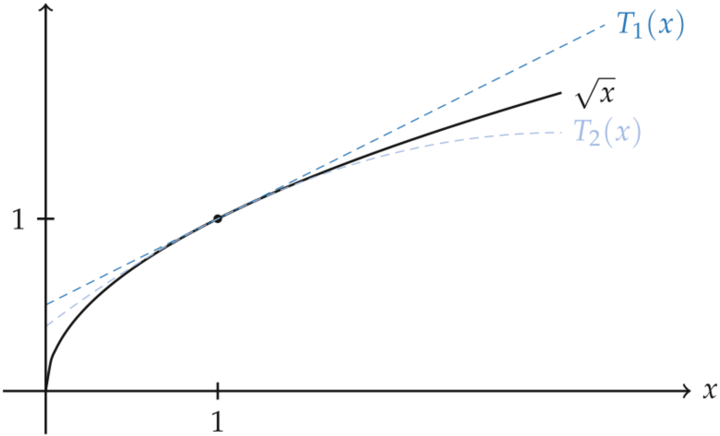
und damit

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

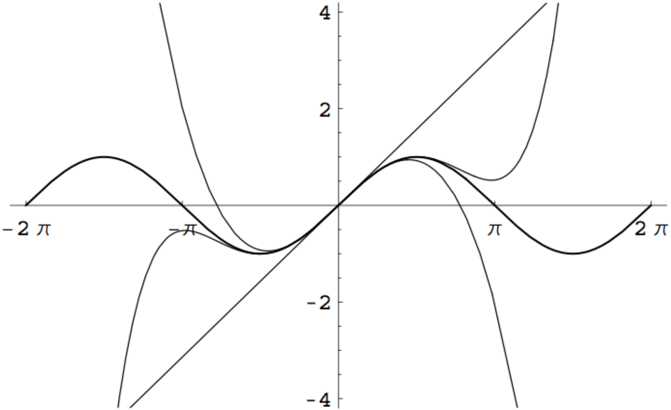
Für $x = 1.1$ ergibt sich

$$T_2(1.1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 - \frac{1}{8}0.01 = 1.04875.$$

Taylor-Approximation für $\sqrt{x}$ bei $x_0 = 1$



Taylor-Approximation für $\sin(x)$ bei $x_0 = 0$



Approximation von $\sin(x)$ durch x, $x - \frac{x^3}{6}$ und $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Restterm

Definition 5.44

Den Fehler der Approximation von $f(x)$ durch $T_n(x)$ nennen wir Restterm und bezeichnen ihn mit

$$R_{n+1}(x) := f(x) - T_n(x).$$

Damit gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Satz von Taylor

Satz 5.45

Sei D ein Intervall, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal auf D differenzierbare Funktion und T_n das n-te Taylorpolynom von f bei x_0.

Dann gibt es für jedes $x \in D$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Bedeutung von "zwischen": Für $x > x_0$ ist $\xi \in (x_0, x)$, für $x < x_0$ ist $\xi \in (x, x_0)$.

Abschätzung für den Restterm

Folgerung 5.46

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.45 gelte, dass ein $C \in \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$$

für alle ξ *zwischen* x_0 *und* x.

Dann folgt für den Restterm

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}.$$

Schätzung des Approximationsfehlers

Beispiel 5.47

Wir betrachten nochmals $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$ und $x = 1.1$.
Wir nehmen $n = 1$. Es gilt dann

$$|f''(\xi)| = |-\frac{1}{4}\xi^{-\frac{3}{2}}| < \frac{1}{4},$$

wegen $\xi > 1$. Damit folgt:

$$|R_2(1.1)| \leq \frac{1}{8} \cdot 0.1^2 = 0.00125.$$

Dies beantwortet insbesondere die zweite Frage von Folie 428.

Beispiel 5.48

Wir wollen mit der gleichen Technik $\sqrt{5}$ abschätzen. Wir suchen zunächst einen Wert nahe 5, dessen Wurzel wir kennen, z.B. $\sqrt{4} = 2$. Dann schätzen wir ab, diesmal mit T_2:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+\frac{1}{4})} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} \\ &\approx 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2.234375.\end{aligned}$$

Wir schätzen den Fehler für $\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ wie im vorangegangenen Beispiel ab.

$$|R_3(1.25)| \leq \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{2^{10}}.$$

Damit ist für $\sqrt{5}$ der Fehler $\leq 2\cdot|R_3(1.25)| \leq \frac{1}{2^9} < 0.002$.

Typ eines stationären Punktes

Satz 5.49

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar auf dem Intervall D, mit $n \geq 2$. Sei x_0 ein innerer Punkt von D, und $f^{(n)}$ sei in x_0 stetig. Weiterhin gelte

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist n gerade, dann gilt

- *Falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.*
- *Falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

Ist n ungerade, dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt.

Beweis.

Mit dem Satz von Taylor (mit n durch $n-1$ ersetzt) erhalten wir wegen $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist.

- Da $f^{(n)}$ auch stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f^{(n)}(x) > 0.$$

- Für solche x folgt auch $|\xi - x_0| < \delta$, also $f^{(n)}(\xi) > 0$.
- Wegen n gerade gilt $(x - x_0)^n \geq 0$.
- Mit obiger Formel folgt $f(x) \geq f(x_0)$ für $|x - x_0| < \delta$. Also ist x_0 ein lokales Minimum.

Fortsetzung Beweis.

- Analog beweist man die Aussage für das lokale Maximum.

Sei nun n ungerade.

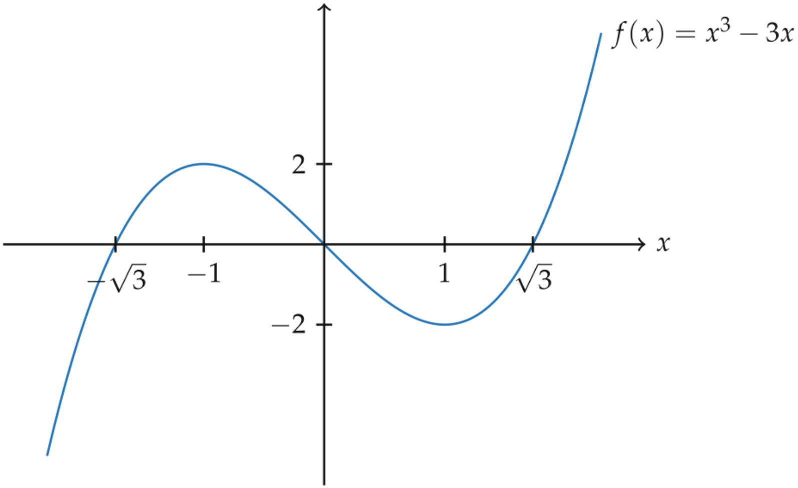
- Für $x > x_0$ gilt $(x - x_0)^n > 0$.
- Für $x < x_0$ gilt $(x - x_0)^n < 0$.
- Wie im ersten Fall hat $f^{(n)}(\xi)$ nahe x_0 ein konstantes Vorzeichen.
- Daher wechselt
$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$
in x_0 sein Vorzeichen.
- Somit ist x_0 ein Sattelpunkt.

Kurvendiskussion

Beispiel 5.50

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$.

- $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.
- $f'(x) = 0$ hat als Lösung $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.
- Aus $f''(x_1) = 6 > 0$ folgt: x_1 ist ein lokales Minimum.
- Aus $f''(x_2) = -6 < 0$ folgt: x_2 ist ein lokales Maximum.
- Für $x < 0$ ist $f''(x) < 0$, also ist f konkav auf $(-\infty, 0)$.
- Für $x > 0$ ist $f''(x) > 0$, also ist f konvex auf $(0, \infty)$.
- Es gilt $x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$. Somit hat f die Nullstellen $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
- Funktionsgraph auf der folgenden Folie.


$f(x) = x^3 - 3x$
x
2
-2
$-\sqrt{3}$
-1
1
$\sqrt{3}$

Taylorreihe

Definition 5.51

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in D$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt Taylorreihe von f um x_0.

Bemerkungen zu Taylorreihen

- Die Taylorpolynome T_n sind die Partialsummen der Taylorreihe.
- Obwohl die Taylorpolynome T_n eine Funktion $f(x)$ approximieren, ist nicht garantiert, dass der Wert der Taylorreihe immer gleich $f(x)$ ist.
- Die Taylorreihe muss für $x \neq x_0$ nicht konvergieren, d. h. der Konvergenzradius kann 0 sein.
- Selbst wenn die Taylorreihe konvergiert, muss sie nicht gegen f konvergieren.
- Um zu zeigen, dass die Taylorreihe einer Funktion f tatsächlich gegen f konvergiert, müssen wir zeigen, dass der Restterm $R_{n+1}(x)$ (punktweise) gegen 0 konvergiert (für $n \to \infty$).

Potenzreihen sind ihre eigenen Taylorreihen

Falls eine Funktion durch eine Potenzreihe definiert ist, ist dies auch die Taylorreihe.

Satz 5.52

Seien $a_n \in \mathbb{R}$ *für* $n \in \mathbb{N}_0$. *Falls der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

größer als 0 *ist, so ist* f *in* x_0 *unendlich oft differenzierbar, und für alle* n *gilt*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Beweis.

Siehe Folie 429. □

Allgemeiner Binomialkoeffizient

Definition 5.53

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir die allgemeinen Binomialkoeffizienten durch

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{0} &:= 1 \\ \binom{\alpha}{k} &:= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Beispiel 5.54

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

Wichtige Taylorreihen

Satz 5.55

Für $|x| < 1$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Diese Reihe heißt Binomialreihe.

Für $|x| < 1$ *gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Für die Funktionen $(\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh)$ *sind die Taylorreihen identisch mit der Potenzreihendarstellung dieser Funktionen.*

Beweis.

Binomialreihe: Sei $f(x) = (1+x)^\alpha$. Dann folgt

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

und somit für $x_0 = 0$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Damit ist die genannte Reihe die Taylorreihe von $f(x)$.
Abschätzung des Restterms: Für einen Spezialfall im nächsten Beispiel.

Logarithmus: Für $f(x) = \log(1+x)$ ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Die Identität von Taylorreihe und Funktion zeigen wir in den Übungen. □

Beispiel 5.56

Wir betrachten nochmals die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

- Wie lautet die Taylorreihe $T(x)$ um $x_0 = 1$?

  Wegen $\sqrt{x} = (1 + (x-1))^{\frac{1}{2}}$ ist dies die Binomialreihe für $\alpha = \frac{1}{2}$ um $x_0 = 1$, also

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-1)^n.$$

- Konvergiert die Taylorreihe? Wenn ja, für welche x?

  Mit dem Quotientenkriterium ermitteln wir den Konvergenzradius.

$$\left| \frac{\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-1)^n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - n}{n+1} \right| \cdot |x-1| \longrightarrow |x-1|.$$

  Also konvergiert die Reihe für $|x-1| < 1$, d. h. für $x \in (0,2)$.

Fortsetzung Beispiel.

- Konvergiert die Taylorreihe gegen $\sqrt{x}$?

  Wir zeigen die Konvergenz des Restterms nur für $x \in (1,2)$. Es gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \binom{\frac{1}{2}}{n+1}\xi^{\frac{1}{2}-n-1}(x-1)^{n+1}.$$

mit $\xi \in (1,x)$ für $x \in (1,2)$.
Weiterhin gilt $\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen $\binom{\frac{1}{2}}{0} = \frac{1}{2} < 1$ und

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n+1}\right| = \frac{n-\frac{1}{2}}{n} \cdot \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| < \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|.$$

Wegen $\xi \geq 1$ folgt $\xi^{\frac{1}{2}-n-1}(x-1)^{n+1} \leq 1$ und damit insgesamt

$$|R_{n+1}(x)| \leq (x-1)^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Zusammenfassung

- Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, Steigung der Tangente am Funktionsgraph
- Ableitungsregeln: Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Ableitung von Potenzreihen
- Höhere Ableitungen
- Funktionseigenschaften: Extrema, Monotonie, Konvexität
- Mittelwertsatz
- Regel von L'Hospital
- Approximation durch Taylorpolynome, Taylorreihen