Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

- Wir wissen $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| = 1$, liegt also auf dem Einheitskreis.
- Mit wachsendem x läuft $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ immer wieder um den Einheitskreis herum.
- Die Laufrichtung ist gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv).

Lemma 8.1

Sei $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

- *Dann gibt es genau ein $T > 0$, für das $f : [0, T) \to K$ bijektiv ist.*
- *Es gilt $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

- Eine Funktion mit $f(x + T) = f(x)$ nennen wir periodisch mit der Periode T.

Die Zahl π

Definition 8.2

Sei T wie in Lemma 8.1. Dann sei die Zahl

$$\pi := \frac{T}{2}.$$

π ist also die Hälfte der Länge des Einheitskreises.

Folgerung 8.3

Die Lösungen der Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1$ *sind* $x = 2\pi k$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Konsequenzen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$

Satz 8.4

(i) *Die Funktionen Sinus und Cosinus sind 2π-periodisch, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

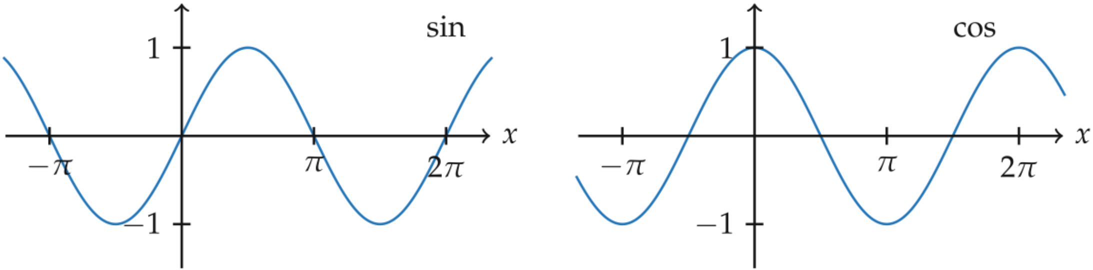
(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

(iii) *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\sin(k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Graph von Sinus und Cosinus



Tab. 14.1 Die wichtigsten Werte von Sinus und Kosinus

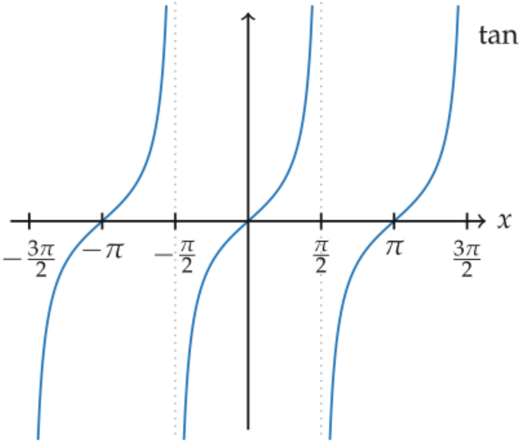
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
Gradmaß	0	30	45	60	90	180
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

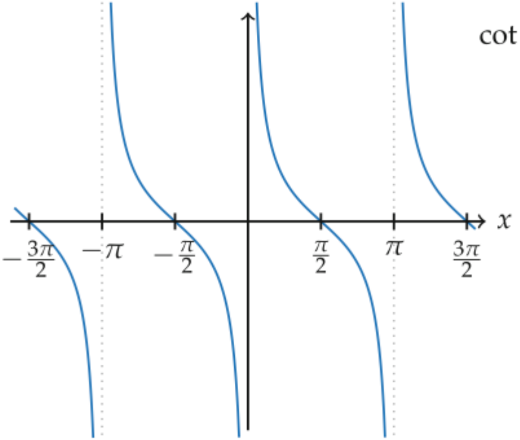
Tangens und Cotangens

Definition 8.5

$$
\begin{aligned}
\tan(x) &:= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \\
\cot(x) &:= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

Graph von Tangens und Cotangens





Eigenschaften von Tangens und Cotangens

Satz 8.6

(i) *Tangens und Cotangens sind π-periodisch:*

$$\tan(x+\pi) = \tan(x), \quad \cot(x+\pi) = \cot(x).$$

(ii) $\cot(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

(iii)

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x), (\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

(iv)

$$\int \tan(x)\,dx = -\log(|\cos(x)|), \quad \int \cot(x)\,dx = \log(|\sin(x)|)$$

Die Arcusfunktionen

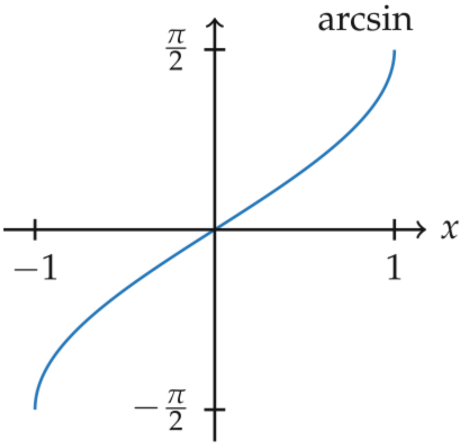
- Die trigonometrischen Funktionen sind nicht injektiv.
- Will man die Umkehrfunktionen definieren, muss daher der Definitionsbereich geeignet eingeschränkt werden.

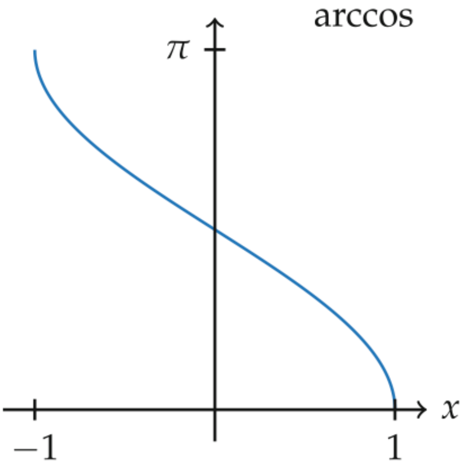
Definition 8.7

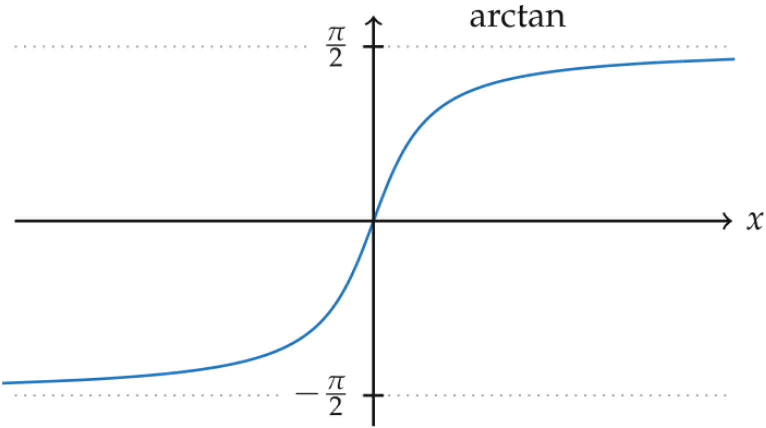
Die Arcusfunktionen sind als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen wie folgt definiert:

Trig. Funktion					Umkehrfunktion				
sin	:	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\to$	$[-1, 1]$	arcsin	:	$[-1, 1]$	$\to$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
cos	:	$[0, \pi]$	$\to$	$[-1, 1]$	arccos	:	$[-1, 1]$	$\to$	$[0, \pi]$
tan	:	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\to$	$\mathbb{R}$	arctan	:	$\mathbb{R}$	$\to$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Graphen der Arcusfunktionen






arctan
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$

Eigenschaften der Arcusfunktionen

Satz 8.8

Es gilt:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Folgerung 8.9

Es gilt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x), \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$$

Nochmals Integration rationaler Funktionen

Beispiel 8.10

Wir wollen

$$\int \frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\, dx$$

bestimmen. Eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist 2. Polynomdivision liefert

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x - 2) = x^2 + 1.$$

Also hat das Nennerpolynom keine weiteren reellen Nullstellen, aber die komplexen Nullstellen i und $-$i. In diesem Fall wählt man einen anderen Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} &= \frac{a}{x-2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{a(x^2+1) + (bx + c)(x - 2)}{(x-2)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-2b + c)x + (a - 2c)}{(x-2)(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 3 \\ & - & 2b & + & c & = & -1 \\ a & & & - & 2c & = & -5 \end{array}$$

mit der Lösung $a = 1, b = 2, c = 3$. Also

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx &= \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx \\ &= \log(x-2) + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \log(x-2) + \log(x^2+1) + 3\arctan(x). \end{aligned}$$