Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis

Klausur Wintersemester 2018/19

27. März 2019

Musterlösungen

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^6+7n^5-3n^3+n^2+7}{4n^7+5n^3-7n^2+1}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2(n^3)}{2n+e^n}$$

(c)

$$\lim_{x\searrow 2} \frac{\cos(\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

(d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\log(x)}$$

Musterlösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{-n^6+7n^5-3n^3+n^2+7}{4n^7+5n^3-7n^2+1} &= -\frac{-\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^6}+\frac{7}{n^7}}{4+\frac{5}{n^4}-\frac{7}{n^5}+\frac{1}{n^7}} \\ &\to \frac{-0+0-0+0+0}{4+0-0+0} = 0 \end{aligned}$$

(b) Wegen

$$\underbrace{0}_{\to 0} \le \frac{\cos^2(n^3)}{2n+e^n} \le \frac{1}{2n+e^n} \le \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}$$

folgt nach Sandwich-Lemma/Schachtelungsprinzip:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2(n^3)}{2n+e^n} = 0$$

(c) Da cos und sin stetige Funktionen sind, gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 2}\cos(\pi x) &= \cos(2\pi)=1\\ \lim_{x\searrow 2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \sin(\pi)=0\end{aligned}$$

Da aber $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)<0$ für $x=2+\varepsilon$ (für (kleines) $\varepsilon>0$), folgt:

$$\lim_{x\searrow 2}\frac{\cos(\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=-\infty$$

(d) Es gilt $x^x=\left(e^{\log(x)}\right)^x=e^{x\log(x)}$ und somit nach der Regel von de l'Hospital sowie Kettenregel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log(x)} &= \left(\frac{0}{0}=\right)\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log(x)+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}\\ &= \left(\frac{0}{0}=\right)\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log(x)+1)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{-1}=-2\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+3+2+3=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie jeweils an, welches Kriterium Sie verwenden!

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+n^4}{1+n^5}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-\log(n+1)}{n^5+n^4}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

(d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{2n}(x-2)^n$$

Musterlösung:

(a) Da

$$\frac{n^5+n^4}{1+n^5} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^5}+1} \to \frac{1+0}{0+1} = 1 \neq 0$$

ist die Folge $a_n := \frac{n^5+n^4}{1+n^5}$ keine Nullfolge. Somit ist die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium divergent.

(b) Sei $a_n := \frac{2n^3-\log(n+1)}{n^5+n^4}$. Wegen $\log(n+1) > 0$, da $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq \frac{2n^3}{n^5+n^4} \leq \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}$$

und die Reihe $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, welche somit nach dem Majorantenkriterium konvergent ist.

(c) Sei

$$a_n := \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als Summe echt positiver Zahlen (streng) monoton wachsend, somit ist die Kehrwertfolge a_n (streng) monoton fallend. Weiterhin ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, ihr Grenzwert ist also ∞. Somit konvergiert die Kehrwertfolge a_n gegen 0. a_n ist also eine monoton fallende Nullfolge, und die Reihe ist daher nach dem Leibnizkriterium konvergent.

(d) Sei $a_n := \binom{3n}{2n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{\binom{3n}{2n}}{\binom{3(n+1)}{2(n+1)}} = \frac{\frac{(3n!)}{(2n!)n!}}{\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!(n+1)!}} = \frac{(3n)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \cdot (2n+2)(2n+1) \cdot (n+1) = \frac{4n^3 + ...}{27n^3 + ...} \to \frac{4}{27} = R \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{4}{27}$.

Alternativ mit dem Quotientenkriterium: Sei $\tilde{a}_n := \binom{3n}{2n}(x-2)^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\tilde{a}_{n+1}}{\tilde{a}_n}\right| &= \frac{\binom{3(n+1)}{2(n+1)}}{\binom{3n}{2n}} \cdot \frac{|x-2|^{n+1}}{|x-2|^n} = \frac{\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!(n+1)!}}{\frac{(3n!)}{(2n!)n!}} \cdot |x-2| = \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot |x-2| \\ &= (3n+3)(3n+2)(3n+1) \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x-2| \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \cdot |x-2| = \frac{27n^3 + ...}{4n^3 + ...} \cdot |x-2| \to \frac{27}{4} \cdot |x-2| < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |x-2| < \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{4}{27}$.

Aufgabe 3 (3+3+4=10 Punkte)

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f_a : \mathbb{R}\backslash\{-a\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_a(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+a}, & x > 1 \\ x^2 - x, & x \leq 1 \end{cases}$$

stetig?

(b) Beweisen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \frac{2x+3}{5}$$

stetig ist!

(c) Geben Sie ein Intervall an, in dem die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) := x^7 + 7x^3 + \sinh(x) + 1$$

genau eine Nullstelle hat!
<u>Hinweis:</u> Sie müssen die Existenz und Eindeutigkeit der Nullstelle beweisen!

Musterlösung:

(a) Damit f_a in $x_0 = 1$ stetig ist, muß gelten: $\lim_{x\searrow 1} f_a(x) = \lim_{x\nearrow 1} f_a(x) = f_a(1)$, also, da $\frac{1}{x+a}$ als Hyperbelfunktion für $x \neq -a$ und $x^2 - x$ als Polynom stetig sind:

$$\frac{1}{1+a} \quad = \quad 1^2 - 1 = 0$$

Diese Gleichung ist für kein $a \in \mathbb{R}$ erfüllt, also ist f_a für alle a unstetig.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{2x+3}{5} - \frac{2x_0+3}{5}\right| = \left|\frac{2(x-x_0)}{5}\right| \\ &= \frac{2}{5}|x - x_0| \end{aligned}$$

Wähle $\delta := \frac{5}{2}\varepsilon$. Dann gilt:

$$|x - x_0| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Somit ist f nach dem $\varepsilon - \delta -$Kriterium für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig, also stetig.

(c) Wegen

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1-7+\sinh(-1)+1 = -7-\sinh(-1) < 0 \\ f(0) &= 1 > 0 \\ f(1) &= 1+7+\sinh(1)+1 = 9+\sinh(1) > 0 \end{aligned}$$

hat f nach dem Zwischenwertsatz, da f als Summe aus Polynomen und dem (stetigen) Sinus hyperbolicus stetig ist, eine Nullstelle im Intervall $(-1,0)$ bzw. $(-1,1)$. (Hinweis zur Korrektur: Es muß nur ein Intervall angegeben werden, und es kann selbstverständlich auch ein anderes angegeben werden, falls ein Vorzeichenwechsel an den Intervallgrenzen erfolgt!)

Für die Eindeutigkeit ist eine Monotonieuntersuchung durchzuführen. Aus denselben Gründen wie oben ist f auch differenzierbar mit

$$f'(x) = 7x^6 + 21x^2 + \cosh(x) > 0$$

Es gilt $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ 7x^6 \geq 0,\ 21x^2 \geq 0, \cosh(x) > 0$. Damit ist also $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit ist f auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Damit muß die Nullstelle eindeutig sein.

Aufgabe 4 (2+4+2+2=10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sin(x)e^{-x}$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

(c) Wo ist f konvex bzw. konkav? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(d) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Musterlösung:

(a) Wegen

$$\sin(x)e^{-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(x) = 0$$

sind die Nullstellen von f die Nullstellen des Sinus, also

$$x = k\pi,\;\; k \in \mathbb{Z}$$

(b) Es gilt

$$f'(x) \;=\; \cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x} = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$$

und somit

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(x) = \cos(x) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\;\; k \in \mathbb{Z}$$

Weiterhin gilt

$$f''(x) \;=\; e^{-x}(-\sin(x) - \cos(x)) - e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) = -2\cos(x)e^{-x}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} k \text{ gerade} \;&\Rightarrow\; f''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) < 0 \\ k \text{ ungerade} \;&\Rightarrow\; f''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) > 0 \end{aligned}$$

und somit liegen für k gerade Maximma und für k ungerade Minima vor.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Wenn zwischen Minima und Maxima nicht unterschieden wird, d.h. nur festgestellt wird, wo die zweite Ableitung ungleich Null ist und dann gesagt wird, daß ein Minimum oder ein Maximum vorliegen muß, ist das in Ordnung!

(c) Es gilt

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$
$$f''(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

Also ist f in den Intervallen $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right]$ konvex und in den Intervallen $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right]$ konkav.

(d) Wegen

$$0 \leq |f(x)| \leq 1 \cdot e^{-x} = e^{-x}$$

folgt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Da $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$, das Vorzeichen von sin aber stets wechselt, ist f für $x \to -\infty$ unbestimmt divergent bzw. es liegt keine Asymptote vor.

Aufgabe 5 (3+3+4=10 Punkte)

Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion:

(a)

$$\int \log(x^2)\,dx$$

(b)

$$\int \frac{2-x}{x^2+x}\,dx$$

(c) Bestimmen Sie, falls existent, den Wert des folgenden uneigentlich Integrals:

$$\int_1^\infty xe^{-2x}\,dx$$

Musterlösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\int \log(x^2)\,dx &= 2\int \log(x)\,dx \\ (&= 2\int 1\cdot\log(x)\,dx = 2(x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx) = 2(x\log(x) - \int 1\,dx)) \\ &= 2(x\log(x) - x) + c\end{aligned}$$

Hinweis zur Korrektur: DIe eingeklammerten Rechenschritte sind nur für den Fall, daß die bereits in der Vorlesung für $\log(x)$ hergeleitete Stammfunktion vergessen wurde, und daher nicht notwendig.

(b) Partialbruchzerlegung liefert ($A, B \in \mathbb{R}$):

$$\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x^2+x}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A+B=-1$ und $A=2$ und somit $B=-3$. Also gilt für das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2-x}{x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1}\right)dx = 2\log|x| - 3\log|x+1| + c$$

(c) Da es sich um ein uneigentliches Integral handelt, ersetze zunächst die obere Integralgrenze durch ein $b > 0$ und bilde anschließend den Grenzwert für $b \to \infty$. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\int_1^b xe^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}xe^{-2x}\,\Big|_1^b + \frac{1}{2}\int_1^b e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2x}\,\Big|_1^b\right) \\
&= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2b} - e^{-2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{1}{4e^2}
\end{aligned}$$

Da sich die e-Funktion gegenüber einem Polynom durchsetzt, gilt $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}be^{-2b} = 0$. Somit existiert das uneigentliche Integral mit dem Wert

$$\int_1^\infty xe^{-2x}\,dx = -0 + \frac{1}{2e^2} - 0 + \frac{1}{4e^2} = \frac{3}{4e^2}$$

Aufgabe 6 (2+3+5=10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2x + x^2 y - \log(y)$$

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(2,-1)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte von f.

Musterlösung:

(a) Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2xy \\ x^2 - \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

(b) Für die Richtungsableitung im Punkt $(2,-1)$ in Richtung v gilt

$$\begin{aligned} D_v f(2,-1) &= \left\langle \nabla f(2,-1), \frac{v}{||v||} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-2+5) = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) Berechne zunächst die stationären Funktionen von f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2xy \\ x^2 - \frac{1}{y} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist das folgende nichtlineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} 2 + 2xy &= 0 \\ x^2 - \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y = \frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$. Dies eingesetzt in die erste liefert:

$$2 + \frac{2}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -1$$

Für $x = -1$ gilt dann $y = \frac{1}{1^2} = 1$. Also ist $(-1,1)$ ein stationärer Punkt.
Der Fall $x = 0$ ist noch separat zu betrachten: Aus der zweiten Gleichung folgt dann $\frac{1}{y} = 0$,

was nicht lösbar ist. Also gibt es keine weiteren stationären Punkte.
Für die Hesse-Matrix gilt

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

und somit

$$D^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Hauptminoren gilt $H_1 = 2 > 0$ und $H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0$. Es liegt also weder der Fall '$> 0 \quad > 0$' (positiv definit) noch der Fall '$< 0 \quad > 0$' (negativ definit), und es gilt $\det(D^2 f(-1,1)) \neq 0$. Somit ist nach dem Kriterium von Sylvester die Hesse-Matrix indefinit, und $(-1,1)$ ist ein Sattelpunkt.