Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 9
SS 2020
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (ε-δ-Kriterium)

Zeigen Sie mithilfe des ε-δ-Kriteriums, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist!

Musterlösung:

Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Durch Polynomdivision erhält man

$$(x^3 - x_0^3) : (x - x_0) = x^2 + xx_0 + x_0^2$$

und somit

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^3 - x_0^3| = |(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)| = |x - x_0||x^2 + xx_0 + x_0^2| \\
&\leq |x - x_0|(x^2 + |x||x_0| + x_0^2) \\
&= |x - x_0|((x - x_0 + x_0)^2 + |x - x_0 + x_0||x_0| + x_0^2) \\
&\leq |x - x_0|((x - x_0)^2 + 2|x - x_0||x_0| + (|x - x_0| + |x_0|)|x_0| + 2x_0^2) \\
&= |x - x_0|((x - x_0)^2 + 3|x - x_0||x_0| + 3x_0^2)
\end{aligned}$$

Wähle zunächst $\delta := 1$, also x so, daß $|x - x_0| \leq \delta$. Dann ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \delta(1 + 3|x_0| + 3x_0^2)$$

Wähle nun $\delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2}\right)$. Dann ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}(1 + 3|x_0| + 3x_0^2) = \varepsilon$$

Da x_0 beliebig war, folgt aus dem ε-δ-Kriterium, daß f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 2 (Zwischenwertsatz)

Geben Sie ein Intervall an, in dem die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sinh(x) - e^{-x}$ eine Nullstelle hat, und zeigen Sie, daß diese Nullstelle eindeutig ist!

Musterlösung:

Da f als Zusammensetzung der stetigen Funktionen $\sinh(x)$ und e^{-x} stetig ist und wegen

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(1) &= \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) - e^{-1} = \frac{e}{2} - \frac{3}{2e} > 0 \end{aligned}$$

hat f nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle. Diese ist eindeutig, da f wegen

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \sinh(x) - e^{-x} < \sinh(y) - e^{-y}$$

streng monoton wachsend ist ($\sinh(x)$ ist streng monoton wachsend und e^{-x} ist streng monoton fallend).

Aufgabe 3 (Gleichmäßige Konvergenz)

Wir betrachten die Folge der Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f_n(x) := \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 .$$

a) Gegen welche Funktion f konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise (mit Beweis)?

b) Zeigen Sie, dass (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

Musterlösung:

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) \\ &= x \cdot x = x^2. \end{aligned}$$

Also lautet die Grenzfunktion $f(x) = x^2$.

b) Für gleichmäßige Konvergenz müsste hier gelten:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Wir negieren diese Aussage:

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 \exists x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon.$$

Wir wählen $\epsilon = 2$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen $n = x = n_0$. Dann gilt

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\left(n_0 + \frac{1}{n_0}\right)^2 - n_0^2\right| = |n_0^2+2n_0\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0^2}-n_0^2| = 2+\frac{1}{n_0^2} \geq 2 = \epsilon.$$