Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 8
SS 2020
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Trigonometrische Gleichungen)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)\\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

(ii) Zeigen Sie: $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

(iii) Lösen Sie die Gleichung $\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x)$.

Musterlösung:

(i) Setze im Additionstheorem des Kosinus einfach $y = x$:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

(ii) Setze im Additionstheorem des Sinus ebenfalls $y = x$:

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Dann folgt mit Pythagoras:

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\ &\overset{\textbf{(i)}}{=} (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)\\ &= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3(1-\cos^2(x))\cos(x)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\end{aligned}$$

Substituiere $z := \cos(x)$. Dann ist die Gleichung

$$4z^3 + 4z^2 - 3z - 5 = 0$$

zu lösen. Polynomdivision durch $z-1$ und pq-Formel liefern $z = 1$ als einzige (reelle) Nullstelle. Rücksubsitution liefert $x = 2\pi n, n\ in\mathbb{N}_0$. Damit hat die Gleichung unendlich viele Lösungen.

(iii) Wegen **(ii)** gilt:

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= 5 - 4\cos^2(x) \\ \Leftrightarrow\ 4\cos^3(x) - 3\cos(x) &= 5 - 4\cos^2(x) \\ \Leftrightarrow\ 4\cos^3(x) + 4\cos^2(x) - 3\cos(x) - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Herleitung expliziter Folgen)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Stellen Sie diese Funktion als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dar, und geben Sie sowohl eine rekursive als auch eine explizite Darstellung für die Folge (a_n) an!

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Es gilt $f(z)(1-z-z^2) = z$. Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung von $f(z)(1-z-z^2)$ um den Entwicklungspunkt 0 und stellen Sie durch Koeffizientenvergleich fest, daß (a_n) genau die Fibonacci-Folge ist. Leiten Sie also somit die rekursive Darstellung der Fibonacci-Folge her!

(ii) Zeigen Sie, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich $\frac{1}{\varphi}$ ist, wobei φ die Zahl des Goldenen Schnitts ist!

(iii) Führen Sie für $f(z)$ eine Partialbruchzerlegung durch!
Tipp: Bezeichnen Sie die Nullstellen von $1-z-z^2$ zur verkürzten Schreibweise als q_1 und q_2.
Es sind dieselben Nullstellen wie die von z^2+z-1, beachten Sie aber bei der Partialbruchzerlegung, daß $f(z) = -\frac{z}{z^2+z-1}$.
Zur Kontrolle:

$$f(z) = -\frac{q_1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-q_1} + \frac{q_2}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-q_2}$$

(iv) Stellen Sie mithilfe dieser Partialbruchzerlegung die erzeugende Funktion als Linearkombination bekannter Potenzreihen dar!

(v) Wenden Sie den Identitätssatz für Potenzreihen an, und geben Sie somit eine explizite Darstellung der Folge (a_n) an! Falls Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie für die explizite Darstellung Fibonacci-Zahlen genau die Formel aus dem Satz von Moivre! Beachten Sie dabei, daß

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Musterlösung:

(i) Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1-z-z^2)f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n \\
&= a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - (a_0 z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n) - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n \\
&= a_0 + (a_1 - a_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) z^n = z
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_0 = 0, a_1 - a_0 = a_1 = 1, \forall_{n \geq 2}\, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau die Folge der Fibonacci-Zahlen.

(ii) Wir wissen, daß das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen die Zahl des Goldenen Schnitts konvergiert:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \varphi$$

also

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\varphi} > 0$$

(iii) Die Nullstellen von $1 - z - z^2$ sind dieselben Nullstellen wie die von $z^2 + z - 1$, und diese ergeben sich nach $p-q$-Formel als

$$q_1 := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad q_2 := -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Führe Partialbruchzerlegung Zerlegung durch ($A, B \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2 + z - 1} &= \frac{A}{z - q_1} + \frac{B}{z - q_2} = \frac{A(z - q_2) + B(z - q_1)}{(z - q_1)(z - q_2)} \\ &= \frac{(A + B)z - Aq_2 - Bq_1}{z^2 + z - 1} \end{aligned}$$

A und B ergeben sich durch Koeffizientenvergleich als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -Aq_2 - Bq_1 &= 0 \end{aligned}$$

also als $A = -\frac{q_1}{q_2 - q_1}$ und $B = 1 - A = \frac{q_2}{q_2 - q_1}$. Somit gilt:

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = -\frac{z}{z^2 + z - 1} = \frac{\frac{q_1}{q_2 - q_1}}{z - q_1} - \frac{\frac{q_2}{q_2 - q_1}}{z - q_2} = -\frac{q_1}{\sqrt{5}} \frac{1}{z - q_1} + \frac{q_2}{\sqrt{5}} \frac{1}{z - q_2}$$

da $q_2 - q_1 = -\sqrt{5}$

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{z}{q_1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{z}{q_2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{q_1} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{q_2} \right)^n, \text{ (geometr. Reihe)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{q_1} \right)^n - \left(\frac{1}{q_2} \right)^n \right) z^n \end{aligned}$$

(da $q_1 - q_2 = \sqrt{5}$), für $\left| \frac{z}{q_i} \right| < \frac{\frac{1}{\varphi}}{|q_i|} < 1, i = 1, 2$

(v) Es gilt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right)^n - \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}} \right)^n \right) z^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) z^n
\end{aligned}
$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist diese Reihe mit der Reihe aus **(i)** identisch. Also ist die explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen gegeben durch

$$
a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)
$$

Das entspricht genau dem Satz von Moivre.

Aufgabe 3 (Stetigkeit)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(i)

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}
$$

(ii)

$$
g(x) = \begin{cases} 3x^2 - a, & x \geq 1, \\ x^3 + a, & x < 1 \end{cases}
$$

(in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$)

Musterlösung:

(i) Wegen

$$
\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1
$$

für $x \neq 1$ und $\lim_{x \to 1} x - 1 = 0 \in \mathbb{R}$, ist die Funktion $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ bei $x = 1$ stetig fortsetzbar/hebbar. Wegen $f(1) = 0$ und da f als rationale Funktion für $x \neq 1$ stetig ist, ist f die stetige Fortsetzung von $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ an der Stelle 1, also stetig.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} (3x^2 - a) = 3 - a \\ \lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1} (x^3 + a) = 1 + a \end{aligned}$$

Es gilt $3 - a = 1 + a \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$. Also stimmen für $a = 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ links- und rechtsseitiger Grenzwert (beide 2) und Funktionswert $f(1) = 2$ überein. Somit ist f für $a = 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig. Da beide Teilfunktionen als Polynome stetig sind, ist f für $a = 1$ stetig.