Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 8
SS 2020

Aufgabe 1 (Trigonometrische Gleichungen)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

(ii) Zeigen Sie: $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

(iii) Lösen Sie die Gleichung $\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x)$.

Aufgabe 2 (Herleitung expliziter Folgen)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Stellen Sie diese Funktion als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dar, und geben Sie sowohl eine rekursive als auch eine explizite Darstellung für die Folge (a_n) an!

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Es gilt $f(z)(1-z-z^2) = z$. Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung von $f(z)(1-z-z^2)$ um den Entwicklungspunkt 0 und stellen Sie durch Koeffizientenvergleich fest, daß (a_n) genau die Fibonacci-Folge ist. Leiten Sie also somit die rekursive Darstellung der Fibonacci-Folge her!

(ii) Zeigen Sie, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich $\frac{1}{\varphi}$ ist, wobei φ die Zahl des Goldenen Schnitts ist!

(iii) Führen Sie für $f(z)$ eine Partialbruchzerlegung durch!
Tipp: Bezeichnen Sie die Nullstellen von $1-z-z^2$ zur verkürzten Schreibweise als q_1 und q_2.
Es sind dieselben Nullstellen wie die von z^2+z-1, beachten Sie aber bei der Partialbruchzerlegung, daß $f(z) = -\frac{z}{z^2+z-1}$.
Zur Kontrolle:

$$f(z) = -\frac{q_1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-q_1} + \frac{q_2}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-q_2}$$

(iv) Stellen Sie mithilfe dieser Partialbruchzerlegung die erzeugende Funktion als Linearkombination bekannter Potenzreihen dar!

(v) Wenden Sie den Identitätssatz für Potenzreihen an, und geben Sie somit eine explizite Darstellung der Folge (a_n) an! Falls Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie für die explizite Darstellung Fibonacci-Zahlen genau die Formel aus dem Satz von Moivre! Beachten Sie dabei, daß

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Aufgabe 3 (Stetigkeit)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(i)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

(ii)

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - a, & x \geq 1, \\ x^3 + a, & x < 1 \end{cases}$$

(in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$)

Aufgabe 4* (Sinus und Kosinus Hyperbolicus)

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung von sinh und cosh.

Aufgabe 5* (Stetigkeit)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(i)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases}$$

(ii)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a}, & x > 1 \\ x^2 - x, & x \leq 1 \end{cases}$$

(in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$)