Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 7
SS 2020
–Musterlösungen–

Aufgabe 1 (Konvergenz von Potenzreihen)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren Sie absolut, und in welchem Fall divergieren sie? Gibt es Fälle, für die man keine Aussage treffen kann? Betrachten Sie auch den Fall $z \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2(n!)}$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2)^n$$

(iii) Hier brauchen Sie keine Randbetrachtung durchzuführen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+z)^{2n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Musterlösung:

(i) Sei $a_n := \frac{1}{2(n!)}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2(n!)}}{\frac{1}{2((n+1)!)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Also ist der Konvergenzradius ∞, und die Potenzreihe ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

(ii) Sei $a_n := \sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2)^n$. Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}(z+2)^{n+1}}{n^n(z+2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot |z+2| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n} \cdot |z+2| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot |z+2| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot |z+2| = e \cdot \infty = \infty
\end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius gleich 0. Es geht auch mit dem Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n |z+2|^n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot |z+2| = \infty$$

Zu untersuchen ist lediglich noch der Fall $|z+2| = 0$, also $z = -2 \in \mathbb{R}$. Die Potenzreihe lautet dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot 0^n = 0^0 \cdot 0^0 = 1 \cdot 1 = 1 < \infty$$

Also ist die Potenzreihe nur für $z = -2$ (absolut) konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{-2\}$ divergent.

(iii) Sei $a_n := \frac{(2+z)^{2n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|2+z|^2}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{|2+z|^2}{2}$$

Der Grenzwert ist echt kleiner eins gdw. $|2+z|^2 < 2 \;\Leftrightarrow\; |z+2| < \sqrt{2}$. Also ist der Konvergenzradius $\sqrt{2}$. Somit ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+2| < \sqrt{2}$ absolut konvergent und mit $|z+2| > \sqrt{2}$ divergent. Für $z \in \mathbb{R}$ ist dies genau der Fall, wenn $-\sqrt{2}-2 < z < \sqrt{2}-2$ (absolute Konvergenz) bzw. $z < -\sqrt{2}-2 \;\vee\; z > \sqrt{2}-2$ (Divergenz). Die Betrachtung des Falls $|z+2| = 2$ ist laut Aufgabenstellung nicht erforderlich.

Aufgabe 2 (Cauchy-Produkt)

(i) Entwickeln Sie die Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z+1}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{z+2}$ in Potenzreihen. Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind die Potenzreihen absolut konvergent?

(ii) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt $h(z) = g(z) \cdot f(z)$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das Cauchy-Produkt absolut konvergent?

Hinweis: Sie müssen das Cauchy-Produkt soweit ausrechnen, bis sie nur eine Summe erhalten!

Musterlösung:

(i) Mithilfe der geometrischen Reihe erhält man

$$f(z) = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

für $|-z| = |z| < 1$, sowie

$$g(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

für $\left|-\frac{z}{2}\right| = \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, also $|z| < 2$.
Die erste Potenzreihe ist also für $|z| < 1$ und die zweite für $|z| < 2$ absolut konvergent.

(ii) Mithilfe des Cauchy-Produktes erhält man

$$\begin{aligned}
g(z)\cdot f(z) &= \frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z^k\left(\frac{1}{2}\right)^k(-1)^{n-k}z^{n-k} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\frac{2-\frac{2}{2^{n+1}}}{2-1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n
\end{aligned}$$

Da beide Potenzreihen auf ihren Konvergenzradien absolut konvergent sind, konvergiert das Cauchy-Produkt absolut auf dem kleinsten der beiden Konvergenzkreise, also für $|z| < \min\{1,2\} = 1$.

Aufgabe 3 (Exponentialreihe)

Geben Sie für die folgende Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Potenzreihendarstellung um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ an, und zeigen Sie, daß die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert!

$$f(z) = z\exp(-2z)$$

Musterlösung:

Wegen

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

folgt sofort

$$z\exp(-2z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2z)^n}{n!} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!} z^{n+1}$$

Wegen

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} z^{n+2}}{(-1)^n \frac{2^n}{n!} z^{n+1}} \right| = \left| 2\frac{z}{n+1} \right|$$

und

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \lim_{n\to\infty} \left| 2\frac{z}{n+1} \right| = 0$$

gilt nach Quotientenkriterium, daß die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.