Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 7
SS 2020

Aufgabe 1 (Konvergenz von Potenzreihen)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren Sie absolut, und in welchem Fall divergieren sie? Gibt es Fälle, für die man keine Aussage treffen kann? Betrachten Sie auch den Fall $z \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2(n!)}$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2)^n$$

(iii) Hier brauchen Sie keine Randbetrachtung durchzuführen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+z)^{2n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Aufgabe 2 (Cauchy-Produkt)

(i) Entwickeln Sie die Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z+1}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{z+2}$ in Potenzreihen. Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind die Potenzreihen absolut konvergent?

(ii) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt $h(z) = g(z) \cdot f(z)$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das Cauchy-Produkt absolut konvergent?

<u>Hinweis:</u> Sie müssen das Cauchy-Produkt soweit ausrechnen, bis sie nur eine Summe erhalten!

Aufgabe 3 (Exponentialreihe)

Geben Sie für die folgende Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Potenzreihendarstellung um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ an, und zeigen Sie, daß die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert!

$$f(z) = z \exp(-2z)$$

Aufgabe 4* (Konvergenz von Potenzreihen)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren Sie absolut, und in welchem Fall divergieren sie? Gibt es Fälle, für die man keine Aussage treffen kann? Betrachten Sie auch den Fall $z \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n2^n}$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n(n+2)}{2^n}$$

Aufgabe 5* (Produktreihe)

Es seien $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen in $\mathbb{C}$. P habe Konvergenzradius $R_P > 0$, und Q habe Konvergenzradius $R_Q > 0$. Zeigen Sie, daß für den Konvergenzradius R der Produktreihe $P(z) \cdot Q(z)$ gilt: $R \geq \min\{R_P, R_Q\}$.