Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 6
SS 2020
–Musterlösungen–

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie:

(i) Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls absolut konvergent.

(ii) Zeigen Sie, daß dies nicht der Fall ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nur konvergent im üblichen Sinne ist.

Musterlösung:

(i) Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie auch beschränkt, und es gilt

$$\exists_{C>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ |b_n| \leq C$$

Wegen $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |a_n b_n| \leq C|a_n|$, und da die Reihe absolut konvergiert, ist

$$C\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n|$, also ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

(ii) Gegenbeispiel: Es gelte $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Da die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Sie ist jedoch nicht absolut konvergent, denn wegen

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n},$$

ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Wegen

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also konvergent. Es gilt jedoch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Dies ist die harmonische Reihe, also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ divergent.

Aufgabe 2 (Konvergenzkriterien für Reihen)

Sind die folgenden unendlichen Reihen konvergent oder divergent? Sind die konvergenten Reihen auch absolut konvergent?

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+n^4}{1+n^5}$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$$

(iv)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

(v)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n - (-1)^n \sqrt{n}}{(3n+2)^3}$$

(vi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7n^2+1}{(n+1)n} \right)^n$$

(vii) Berechnen Sie hierzu auch den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$$

Musterlösung:

(i) Da die Folge $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ zwei verschiedene Häufungspunkte (1 und -1) hat, ist sie unbestimmt divergent und damit keine Nullfolge. Daher ist die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium divergent.

(ii) Da

$$\frac{n^5+n^4}{1+n^5} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^5}+1} \to \frac{1+0}{0+1} = 1 \neq 0$$

ist die Folge $a_n := \frac{n^5+n^4}{1+n^5}$ keine Nullfolge. Somit ist die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium divergent.

(iii) Sei $a_n = \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$. Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2(n+1)^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{n^2(n+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^2 \\
&= 0 \cdot 1 = 0 < 1
\end{aligned}$$

konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium (absolut).

(iv) Sei

$$a_n := \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

Die Folge $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als Summe echt positiver Zahlen (streng) monoton wachsend, somit ist die Kehrwertfolge a_n (streng) monoton fallend. Weiterhin ist die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, ihr Grenzwert ist also ∞. Somit konvergiert die Kehrwertfolge a_n gegen 0. a_n ist also eine monoton fallende Nullfolge, und die Reihe ist daher nach dem Leibnizkriterium konvergent.
Wegen

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right| = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \geq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1} = \frac{1}{n}$$

ist die harmonische Reihe eine divergente Majorante für $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$. Also ist die Reihe nicht absolut konvergent.

(v) Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{2n-(-1)^n\sqrt{n}}{(3n+2)^3} &\leq \frac{2n+\sqrt{n}}{(3n+2)^3} \leq \frac{2n+n}{(3n+2)^3} \\
&= \frac{3n}{(3n+2)^3} \leq \frac{3n}{(3n)^3} = \frac{3n}{27n^3} = \frac{1}{9n^2}
\end{aligned}$$

ist $\displaystyle\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante für die Reihe, also ist die Reihe nach dem Majorantenkriterium konvergent. Da dieselbe Abschätzung auch für

$$\left|\frac{2n-(-1)^n\sqrt{n}}{(3n+2)^3}\right|$$

gilt, ist die Reihe auch absolut konvergent.

(vi) Sei $a_n := \left(\frac{7n^2+1}{(n+1)n}\right)^n$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{7n^2+1}{(n+1)n}\right)^n} = \frac{7n^2+1}{(n+1)n} = \frac{7n^2+1}{n^2+n} \to 7 > 1$$

ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium divergent.

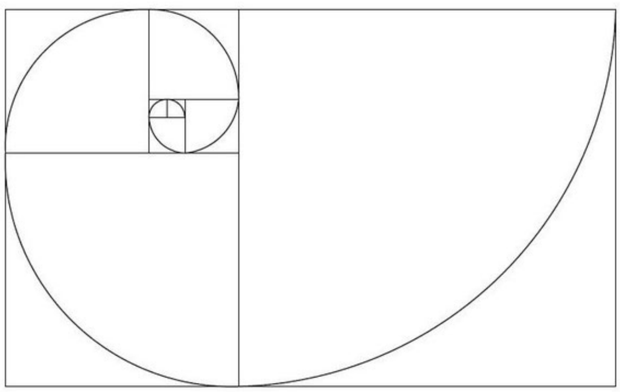
(vii) Es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}} \quad = \quad 3 \cdot 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Bei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ handelt es sich um eine geometrische Reihe. Wegen $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ ist diese absolut konvergent, und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}} \quad = \quad 12 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 12 \cdot 4 = 48$$

Aufgabe 3 (Fibonacci-Spirale)



Das größte Rechteck in der Abbildung ist ein Goldenes Rechteck. Nimmt man ein Quadrat weg, so bleibt ein Goldenes Rechteck übrig. Dies gilt auch für alle weiteren Rechtecke und Quadrate. Die Länge des größten Rechtecks ist der Goldene Schnitt φ, die Breite ist 1. Damit gilt für die Folge der (immer kleiner werdenden) Rechtecksbreiten:

$$a_n = \frac{1}{\varphi^{n-1}}$$

Zeichnet man in die Goldenen Rechtecke Viertelkreise gemäß obiger Abbildung ein, so entsteht eine unendliche Spirale, die sogenannte *Fibonacci-Spirale* oder *Goldene Spirale*. Berechnen Sie die Länge der unendlichen Fibonacci-Spirale!

Hinweis: Der Umfang eines Kreises vom Radius r ist gegeben durch $2\pi r$.

Musterlösung:

Die Spirale entsteht durch die Viertelkreise, die durch die Quadrate verlaufen. Für die Seitenlänge des n-ten Quadrates (das ist die Länge des n-ten Rechtecks) gilt:

$$a_n = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}$$

Die Seitenlängen der Quadrate entsprechen der Radien der Viertelkreise. Die Bogenlänge eines Viertelkreises ist gleich

$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi}{4} a_n = \frac{\pi}{2} a_n$$

Also gilt für die Länge S der unendlichen Fibonacci-Spirale:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}$$

konvergiert, da $\left|\frac{1}{\varphi}\right| < 1$. Also ergibt sich

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\varphi}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi}{\varphi - 1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi}{\frac{1}{\varphi}} = \frac{\pi}{2} \varphi^2 \approx 4.112398173$$