Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 6
SS 2020

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie:

(i) Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls absolut konvergent.

(ii) Zeigen Sie, daß dies nicht der Fall ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nur konvergent im üblichen Sinne ist.

Aufgabe 2 (Konvergenzkriterien für Reihen)

Sind die folgenden unendlichen Reihen konvergent oder divergent? Sind die konvergenten Reihen auch absolut konvergent?

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+n^4}{1+n^5}$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$$

(iv)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

(v)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n - (-1)^n \sqrt{n}}{(3n+2)^3}$$

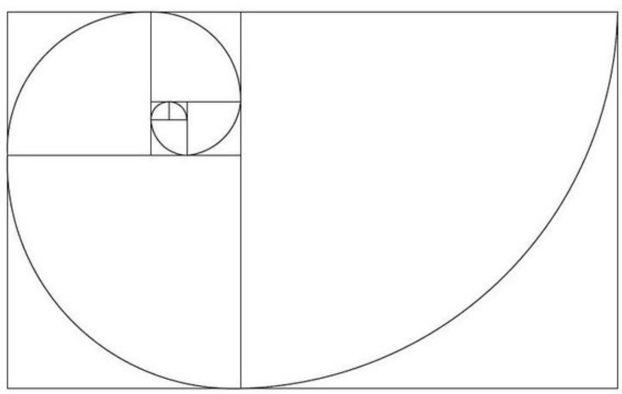
(vi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7n^2+1}{(n+1)n} \right)^n$$

(vii) Berechnen Sie hierzu auch den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$$

Aufgabe 3 (Fibonacci-Spirale)



Das größte Rechteck in der Abbildung ist ein Goldenes Rechteck. Nimmt man ein Quadrat weg, so bleibt ein Goldenes Rechteck übrig. Dies gilt auch für alle weiteren Rechtecke und Quadrate. Die Länge des größten Rechtecks ist der Goldene Schnitt φ, die Breite ist 1. Damit gilt für die Folge der (immer kleiner werdenden) Rechtecksbreiten:

$$a_n = \frac{1}{\varphi^{n-1}}$$

Zeichnet man in die Goldenen Rechtecke Viertelkreise gemäß obiger Abbildung ein, so entsteht eine unendliche Spirale, die sogenannte *Fibonacci-Spirale* oder *Goldene Spirale*. Berechnen Sie die Länge der unendlichen Fibonacci-Spirale!

Hinweis: Der Umfang eines Kreises vom Radius r ist gegeben durch $2\pi r$.

Aufgabe 4* (Konvergenzkriterien für Reihen)

Sind die folgenden unendlichen Reihen konvergent oder divergent? Sind die konvergenten Reihen auch absolut konvergent?

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7+1}{1-n^7}$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + n\cos(n\pi)}{2n^3+n^8}$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+7}\right)^n$$

(iv) Diese Reihe brauchen Sie nicht auf absolute Konvergenz zu untersuchen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

(v)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$$

(vi) Berechnen Sie hierzu auch den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$$

(vii) Berechnen Sie hierzu auch den Grenzwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n-1}}$$