Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 5
SS 2019, KW 19: Mo, 6. Mai – Do, 9. Mai
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Heron-Verfahren zur Wurzelbestimmung)

Bestimmen Sie die ersten sechs Iterationen $x_1, ..., x_6$ des Heron-Verfahrens zur Bestimmung von $\sqrt[3]{5}$ mit dem Startwert $x_0 := 1$, und verifizieren Sie die quadratische Konvergenz!

Hinweis: Hilfreich wäre hier ein kleines Computerprogramm!

Musterlösung:

Die Iterationsvorschrift des Heronverfahrens lautet allgemein

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}}$$

Hier gilt $a = 5$ und $p = 3$.

Die ersten sechs Iteration lauten (erhalten durch ein *python*-Programm):

x_1 =2.33333333333
x_2 =1.86167800454
x_3 =1.72200188006
x_4 =1.7100597366
x_5 =1.70997595078
x_6 =1.70997594668

Die Anzahl an Nullen hinter dem Komma erhöht sich beim Fehler $|x_n - \sqrt[3]{5}|$ ab x_3 um etwa den Faktor 2, also kann man sehen, daß das Verfahren quadratisch konvergiert:

$|x_1 - \sqrt[3]{5}| = 0.623357386657$
$|x_2 - \sqrt[3]{5}| = 0.151702057858$
$|x_3 - \sqrt[3]{5}| = 0.0120259333819$
$|x_4 - \sqrt[3]{5}| = 8.37899235977e\text{-}05$
$|x_5 - \sqrt[3]{5}| = 4.10549216845e\text{-}09$
$|x_6 - \sqrt[3]{5}| = 2.22044604925e\text{-}16$

Die Lösung lautet $\sqrt[3]{5} \approx 1.70997594668$. Der Wert x_6 liefert also bis auf einen Fehler in der Größenordnung von 10^{-16} eine sehr gute Annäherung.

Alternative Lösung (nach Satz 2.29, Becker)

Das verallgemeinerte Heron-Verfahren für k-te Wurzeln ist definiert durch:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a \\
x_n &= \frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right) \text{ für } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Hier gilt $a = 5$ und $k = 3$.

Die ersten sieben Iteration lauten (erhalten durch ein *Java*-Programm):

$x_1 = 3.4$
$x_2 = 2.4108419838523645$
$x_3 = 1.8939831599514854$
$x_4 = 1.7272739664874979$
$x_5 = 1.710148601756556$
$x_6 = 1.7099759641072134$
$x_7 = 1.709975946676697$

Die Anzahl an Nullen hinter dem Komma erhöht sich beim Fehler $|x_n - \sqrt[3]{5}|$ ab x_4 um etwa den Faktor 2, also kann man sehen, daß das Verfahren quadratisch konvergiert:

$|x_1 - \sqrt[3]{5}| = 1.690024053323303$
$|x_2 - \sqrt[3]{5}| = 0.7008660371756676$
$|x_3 - \sqrt[3]{5}| = 0.18400721327478853$
$|x_4 - \sqrt[3]{5}| = 0.017298019810801035$

$|x_5 - \sqrt[3]{5}|$ =1.7265507985908535E-4
$|x_6 - \sqrt[3]{5}|$ =1.7430516585648093E-8
$|x_7 - \sqrt[3]{5}|$ =2.220446049250313E-16

Die Lösung lautet $\sqrt[3]{5} \approx 1.70997594668$. Der Wert x_7 liefert also bis auf einen Fehler in der Größenordnung von 10^{-16} eine sehr gute Annäherung.

Aufgabe 2 (Grenzwertsätze)

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Es gelte weiterhin $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n \neq 0$. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

Anleitung: Wenden Sie für $|b_n|$ die Dreiecksungleichung nach unten an und schätzen Sie $|b_n|$ durch $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$ nach unten ab. Wenden Sie dies an, um

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right|$$

nach oben mithilfe der Dreiecksungleichung nach oben abzuschätzen.

Musterlösung:

Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ konvergent ist und den Grenzwert $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ besitzt, können wir $|b_n - b|$ beliebig klein machen (Definition der Konvergenz, sh. Vorlesung). Gemäß der Anleitung in der Aufgabenstellung wählen wir $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$, dann muss ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass

$$\forall_{n\geq n_0}\ |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \tag{0.1}$$

gilt. Nun schätzen wir $|b_n|$ für $n \geq n_0$ nach unten ab.

$$\begin{aligned}
|b_n| &= |b_n - b + b| \\
&= |b - (b - b_n)| \\
&\geq ||b| - |b - b_n|| && \text{— } \triangle\text{-UG} \\
&> ||b| - \frac{|b|}{2}| && \text{— siehe Erklärung unten} \\
&= \frac{|b|}{2} \\
&> 0 && \text{— denn es gilt } b \neq 0
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also für $n \geq n_0$:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \tag{0.2}$$

Die Ungleichung $||b| - |b - b_n|| > ||b| - \frac{|b|}{2}|$ kommt wie folgt zustande: Es gilt $|b - b_n| = |-(b_n - b)| = |b_n - b|$, also ist wegen (0.1) auch $|b - b_n| < \frac{|b|}{2}$, $\forall_{n \geq n_0}$. Wir ersetzen also in der Ungleichung den Teil $|b - b_n|$ durch einen echt größeren Wert. Auf der rechten Seite der Ungleichung ziehen wir also von $|b|$ einen größeren Wert ab als auf der linken. Da aber in jedem Fall $|b| > \frac{|b|}{2}$ gilt, muss auch $||b| - |b - b_n|| > ||b| - \frac{|b|}{2}|$ gelten.

Um nachzuweisen, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

gilt, müssen wir nun zeigen, dass auch

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right|$$

beliebig klein werden kann. Konkret zu zeigen ist hier also (Definition der Konvergenz, siehe Vorlesung):

$$\forall_{\tilde{\varepsilon} > 0} \ \exists_{\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq \tilde{n}_0} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \tilde{\varepsilon} \tag{0.3}$$

Für $n \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \\
&= \left|\frac{1}{b_n b} \cdot (b - b_n)\right| \\
&= \frac{1}{|b_n||b|} \cdot |b - b_n| \\
&< \frac{1}{\frac{|b|}{2}|b|} \cdot |b_n - b| && \text{— siehe Erklärung unten} \\
&= \frac{2}{|b||b|} \cdot |b_n - b| \\
&= \frac{2}{b^2} \cdot |b_n - b|
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\frac{1}{|b_n||b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{\frac{|b|}{2}|b|} \cdot |b_n - b|$ kommt wie folgt zustande: Für $n \geq n_0$ gilt (0.2). Wir ersetzen also das $|b_n|$ auf der linken Seite durch den echt kleineren Wert $\frac{|b|}{2}$. Dadurch, dass wir den Nenner verringern, wird das Ergebnis des Bruchs aber insgesamt vergröert, wodurch die Ungleichung in dieser Art zustande kommt.

Wir haben nun gezeigt, dass für $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2} \cdot |b_n - b| \tag{0.4}$$

gilt. Da $\frac{2}{b^2}$ konstant ist und wir bereits wissen, dass wir $|b_n - b|$ beliebig klein machen können, könnten wir an dieser Stelle bereits folgern, dass $\frac{1}{b}$ der Grenzwert der Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sein muss.

Alternativ können wir auch noch zeigen, dass wir tatsächlich für beliebige $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ angeben können, sodass

$$\forall_{n\geq\tilde{n}_0} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \tilde{\varepsilon}$$

gilt. Dazu verwenden wir wieder unser Wissen, dass wir $|b_n - b|$ beliebig klein machen können. In Anlehnung an die Ungleichung (0.4) setzen wir $\varepsilon' = \frac{\tilde{\varepsilon}b^2}{2}$. Wir wählen ε' in dieser Art und Weise, damit die Konstante in Ungleichung (0.4) zu 1 wird. Da b der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, können wir auch zu ε' ein $n_0' \in \mathbb{N}$ angeben, sodass

$$\forall_{n\geq n_0'} |b_n - b| < \frac{\tilde{\varepsilon}b^2}{2} \tag{0.5}$$

gilt. Zu beachten ist, dass n_0 und n_0' unabhängig voneinander sind. Wir wissen bereits, dass die Ungleichung (0.4) für alle Natürlichen Zahlen gröer

n_0 und die Ungleichung (0.5) für alle Natürlichen Zahlen gröer $n_0^{'}$ gilt. Da wir aber nicht wissen, in welcher Beziehung n_0 und $n_0^{'}$ stehen, müssen wir allgemein vom größeren der beiden Werte ausgehen, damit sichergestellt ist, dass sowohl (0.4) als auch (0.5) gelten. Wir setzen also $\tilde{n}_0 = \max\left\{n_0, n_0^{'}\right\}$ und können damit

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &< \frac{2}{b^2} \cdot |b_n - b| && \text{— wegen (0.4)} \\
&< \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\tilde{\varepsilon} b^2}{2} && \text{— wegen (0.5)} \\
&= \tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

$\forall_{n \geq \tilde{n}_0}$ folgern. Damit haben wir (0.3) bewiesen.

Aufgabe 3 (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* der Folge, falls

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{n_0\in\mathbb{N}}\ \exists_{n\geq n_0}\ |x_n - x| \leq \varepsilon$$

In jedem (noch so kleinen) ε-Streifen um den Häufungspunkt x wird man, egal wie man n_0 wählt, immer noch mindestens ein Folgeglied x_n mit $n \geq n_0$ finden, das in dem ε-Streifen liegt. Nach Satz 3.9 Hülsmann ist der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von (x_n) stets Häufungspunkt. Weiterhin sind der *Limes superior* und der *Limes inferior* von (x_n) definiert durch:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} x_n &:= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m, \\
\liminf_{n\to\infty} x_n &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} x_m
\end{aligned}$$

(i) Machen Sie sich anhand einer Skizze klar, daß die Folge $\left(\sup_{m\geq n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und die Folge $(\inf_{m\geq n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

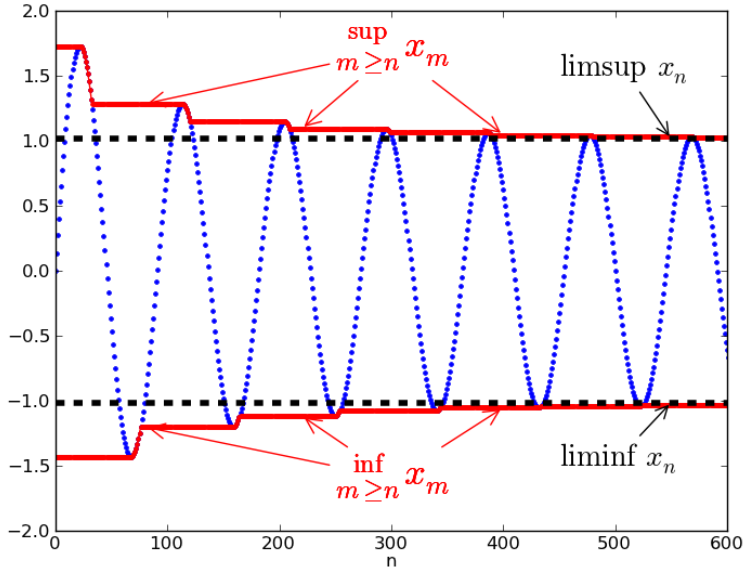
(ii) Überlegen Sie sich, daß $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste Häufungspunkt von (x_n) ist!

(iii) Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior der folgenden Folgen:

$$(-1)^n, \quad \frac{(-1)^n}{n+3}$$

Musterlösung:

(i)



(ii) Da die Folge (x_n) nach oben beschränkt ist (sonst würde der Limes superior nicht existieren), hat sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, also einen Häufungspunkt $x := \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}$. Setze $b_n := \sup_{m\geq n} x_m$. Diese Folge ist gemäß den Überlegungen aus **(i)** monoton fallend, und da $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m = \limsup_{n\to\infty} x_n$, nach unten durch den Limes superior beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist die Folge (b_n) damit konvergent. Für deren Grenzwert gilt:

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Da (b_n) monoton fallend, ist $b_n = \max_{m\geq n} x_m$ eine konvergente Teilfolge von (x_n). Also ist deren Grenzwert $b = \limsup_{n\to\infty} x_n$ ein Häufungspunkt von (x_n). Damit ist schonmal gezeigt, daß der Limes superior ein Häufungspunkt ist. Bleibt zu zeigen, daß es der kleinste ist: Sei $\tilde{b}$ weiterer Häufungspunkt von (x_n). Dann gibt es eine Teilfolge $(\tilde{b}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) mit $\tilde{b} = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{b}_{n_k}$. Wegen

$$b_{n_k} = \sup_{\ell\geq n_k} x_\ell \geq \tilde{b}_{n_k}$$

gilt für den Grenzwert

$$b = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} \tilde{b}_{n_k} = \tilde{b}$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \tilde{b}$ für jeden weiteren Häufungspunkt $\tilde{b}$. Daß der Limes inferior der größte Häufungspunkt ist, zeigt man völlig analog.

(iii)

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(-1)^n &= 1\\
\liminf_{n\to\infty}(-1)^n &= -1\\
\limsup_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+3} &= 0\\
\liminf_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+3} &= 0
\end{aligned}$$

Die Folge $\frac{(-1)^n}{n+3}$ ist konvergent. Limes superior und Limes inferior sind gleich und stimmen mit dem Grenzwert überein.

Aufgabe 4 (Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$)

Sind folgende Folgen konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(i) $a_n = \left(-\frac{1}{n^2}, 2^{-n}, \sqrt[n]{n}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

(ii) $b_n = \frac{1+ni}{1+2n} \subseteq \mathbb{C}$

(iii) $c_n = i^n + (-1)^n \subseteq \mathbb{C}$

Musterlösung:

(i) Da alle Komponentenfolgen konvergent sind, ist auch (a_n) konvergent mit dem Grenzwert

$$(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$$

(ii) Es gilt

$$b_n = \frac{1}{1+2n} + \frac{n}{1+2n}i$$

Da sowohl Real- als auch Imaginärteilfolge konvergent sind, ist auch (b_n) konvergent mit dem Grenzwert

$$0 + 1 \cdot i = i \in \mathbb{C}$$

(iii) Es gilt

$$c_n = i^n + (-1)^n = \begin{cases} 1+1=2, & n=4k, k\in\mathbb{Z} \\ i-1, & n=4k+1, k\in\mathbb{Z}, \\ -1+1=0, & n=4k+2, k\in\mathbb{Z}, \\ -i-1, & n=4k+3, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Wegen $|i-1| = |-i-1| = \sqrt{2}$, gilt insgesamt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |c_n| \leq 2$. Daher ist die Folge beschränkt. Da $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist, kann keine Aussage über Monotonie getroffen werden. Die Folge besteht aus vier unterschiedlichen Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten, ist daher also unbestimmt divergent.

Aufgabe 5* (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior)

(i) Bestimmen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n + (-2)^n - (-3)^n,\ \liminf_{n\to\infty}\cos(n\pi) + \sin(2n\pi)$$

(ii) Konstruieren Sie eine Folge mit genau drei Häufungspunkten!

Aufgabe 6* (Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$)

Sind folgende Folgen konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(i) $a_n = \left(\sqrt[n]{n^2+11}, \frac{n^{27}+n^{24}-3n^5+7n^6-3n^2-1}{2n^{28}-2n^{27}+n^{11}+n^{12}-(-1)n^2}, \frac{n^2}{4\pi}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

(ii) $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{i}{n} \subseteq \mathbb{C}$

(iii) $c_n = \sin(n\pi) + \frac{i}{\sqrt[n]{n}} \subseteq \mathbb{C}$