Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
*University of Applied Sciences*

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

# Analysis
# Übungsblatt 5
# SS 2020

**Aufgabe 1 (Heron-Verfahren zur Wurzelbestimmung)**

Bestimmen Sie die ersten sechs Iterationen $x_1, ..., x_6$ des Heron-Verfahrens zur Bestimmung von $\sqrt[3]{5}$ mit dem Startwert $x_0 := 1$, und verifizieren Sie die quadratische Konvergenz!

**Hinweis**: Hilfreich wäre hier ein kleines Computerprogramm!

**Aufgabe 2 (Grenzwertsätze)**

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Es gelte weiterhin $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n \neq 0$. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

**Anleitung**: Wenden Sie für $|b_n|$ die Dreiecksungleichung nach unten an und schätzen Sie $|b_n|$ durch $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$ nach unten ab. Wenden Sie dies an, um

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right|$$

nach oben mithilfe der Dreiecksungleichung nach oben abzuschätzen.

**Aufgabe 3 (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior)**

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ein Punkt $x$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, falls

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{n_0\in\mathbb{N}}\ \exists_{n\geq n_0}\ |x_n - x| \leq \varepsilon$$

In jedem (noch so kleinen) $\varepsilon$-Streifen um den Häufungspunkt $x$ wird man, egal wie man $n_0$ wählt, immer noch mindestens ein Folgeglied $x_n$ mit $n \geq n_0$ finden, das in dem $\varepsilon$-Streifen liegt. Nach Satz 3.9 Hülsmann ist der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $(x_n)$ stets Häufungspunkt. Weiterhin sind der *Limes superior* und der *Limes inferior* von $(x_n)$ definiert durch:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &:= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m,\\ \liminf_{n\to\infty} x_n &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} x_m\end{aligned}$$

**(i)** Machen Sie sich anhand einer Skizze klar, daß die Folge $\left(\sup_{m\geq n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und die Folge $(\inf_{m\geq n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

**(ii)** Überlegen Sie sich, daß $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(x_n)$ ist!

**(iii)** Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior der folgenden Folgen:

$$(-1)^n, \quad \frac{(-1)^n}{n+3}$$

**Aufgabe 4 (Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$)**

Sind folgende Folgen konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

**(i)** $a_n = \left(-\frac{1}{n^2}, 2^{-n}, \sqrt[n]{n}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

**(ii)** $b_n = \frac{1+ni}{1+2n} \subseteq \mathbb{C}$

**(iii)** $c_n = i^n + (-1)^n \subseteq \mathbb{C}$

**Aufgabe 5* (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior)**

**(i)** Bestimmen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n + (-2)^n - (-3)^n,\ \liminf_{n\to\infty} \cos(n\pi) + \sin(2n\pi)$$

**(ii)** Konstruieren Sie eine Folge mit genau drei Häufungspunkten!

**Aufgabe 6* (Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$)**

Sind folgende Folgen konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

**(i)** $a_n = \left(\sqrt[n]{n^2+11}, \frac{n^{27}+n^{24}-3n^5+7n^6-3n^2-1}{2n^{28}-2n^{27}+n^{11}+n^{12}-(-1)n^2}, \frac{n^2}{4\pi}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

**(ii)** $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{i}{n} \subseteq \mathbb{C}$

**(iii)** $c_n = \sin(n\pi) + \frac{i}{\sqrt[n]{n}} \subseteq \mathbb{C}$