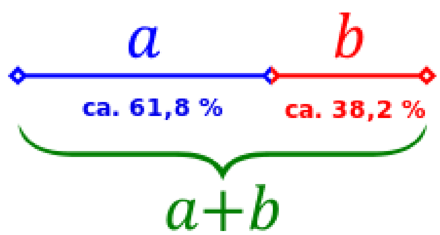
Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 4
SS 2020
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt)



Das Teilungsverhältnis einer Strecke, wobei das Verhältnis der Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke gleich dem Verhältnis der größeren zur kleineren Teilstrecke ist, heißt *Goldener Schnitt*. In Formeln (siehe Abbildung):

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

(i) Bestimmen Sie dieses Teilungsverhältnis, also eine Zahl $\varphi \in \mathbb{R}_+$ so, daß

$$\varphi = \frac{a}{b}$$

(ii) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall_{n \geq 2}\ \varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

(iii) Betrachten Sie die Folge der Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ für $n = 1, ..., 8$. Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Beweisen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Sie können voraussetzen, daß die Folge konvergiert!

Musterlösung:

(i) Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow &1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow &1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \\
\Leftrightarrow &\varphi + 1 = \varphi^2 \\
\Leftrightarrow &\varphi^2 - \varphi - 1 = 0
\end{aligned}
$$

p-q-Formel liefert:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Da $\varphi_2 < 0$ und ein Längenverhältnis nur positiv sein kann, ist $\phi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ als einzige Lösung die Zahl des Goldenen Schnitts.

(ii) Induktionsanfang ($n = 2$): Es gilt $\varphi^2 = \varphi + 1$, da φ Nullstelle der quadrat. Funktion $\varphi^2 - \varphi - 1$ (siehe **(i)**).
Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung (IV) gilt

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

für ein $n \geq 2$. Damit gilt:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n \cdot \varphi \overset{\text{(IV)}}{=} (\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2})\varphi = \varphi^n + \varphi^{n-1}$$

Man braucht aber nicht unbedingt vollständige Induktion: Man kann auch einfach aus **(i)** die Gleichung

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

auf beiden Seiten mit φ^{n-1} mulitplizieren, woraus dann direkt die Behauptung folgt.

(iii)

Es gilt:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1,\ \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2,\ \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2},\ \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3},\ \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5},$$
$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1.625,\ \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \approx 1.6154,\ \frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \approx 1.619$$

Vermutung: Die Folge $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Goldenen Schnitt $\varphi \approx 1.618033989$.
Dies stimmt tatsächlich!
Beweis: Wegen
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
gilt
$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}},$$
also
$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n+1}} - 1 = 0$$
Nehme an, daß $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Grenzwert. Dann gilt, da der Grenzwert eindeutig ist:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n+1}} - 1\right) = 0 = a - \frac{1}{a} - 1$$
Aus $a - \frac{1}{a} = 1$ folgt wegen (**i**): $a = \varphi$.

Aufgabe 2 (Grenzwertsätze)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen! Entscheiden Sie im Fall der Divergenz, ob die Folge bestimmt oder unbestimmt divergent ist!

(i) $\frac{2n^3-n^2+n+1}{n^3+n^2-n-3}$, **(ii)** $n \cdot \frac{1-4^{-n}}{3n+5}$, **(iii)** $\frac{\binom{n}{3}}{n^3}$, **(iv)** $n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n$,
(v) $\frac{n^2}{2^n}$, **(vi)** $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Tipp für Aufgabenteil **(v)**: Zeigen Sie zunächst mithilfe des Binomischen Lehrsatzes: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 2^n > \binom{n}{3}$.

Musterlösung:

(i) Kürze durch die höchste Potenz des Nenners, also n^3:
$$\frac{2n^3-n^2+n+1}{n^3+n^2-n-3} = \frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}} \to \frac{2-0+0+0}{1+0-0-0} = 2$$

(ii) Wegen $\lim_{n\to\infty} 4^{-n} = 0$ folgt

$$n \cdot \frac{1-4^{-n}}{3n+5} \quad = \quad (1-4^{-n}) \cdot \frac{n}{3n+5} = (1-4^{-n})\frac{1}{3+\frac{5}{n}} \to (1-0) \cdot \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

(iii) Es gilt

$$\frac{\binom{n}{3}}{n^3} \quad = \quad \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \to \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(iv) Wegen

$$n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n \quad = \quad \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - n = \sqrt{n^2+1} - n$$

erhält man mit der 3. binomischen Formel:

$$(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n) = n^2 + 1 - n^2 = 1$$

also

$$0 \leq n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \frac{1}{n}$$

Somit folgt nach Sandwich-Lemma/Schachtelungsprinzip:

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n = 0$$

(v) Wegen der Binomischen Formel (siehe auch Übungsblatt 1, Aufgabe 2 **(vi)**) gilt

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > \binom{n}{3}$$

und somit

$$0 \leq \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = 3! \cdot \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = 6 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \to 6 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Somit folgt nach Sandwich-Lemma/Schachtelungsprinzip:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

(vi) Wegen

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & n = 1+4k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1, & n = 3+4k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

gibt es drei Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{1+4k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3+4k} = -1$. Daher ist die Folge unbestimmt divergent.

Aufgabe 3 (Rekursiv definierte Folge)

Fliesenleger Jupp soll einen Weg der Länge n pflastern. Ihm stehen hierfür vier verschiedene Fliesentypen der Länge eins in den Farben rot ( ), grün ( ), blau ( ) und gelb ( ), sowie zwei verschiedene Fliesentypen der Länge zwei in den Farben magenta ( ) und türkis ( ) zur Verfügung.

Jupp fragt sich, wie viele verschiedene Pflasterungen es für einen Weg der Länge n wohl gibt. Wir wollen ihm bei der Beantwortung dieser Frage helfen.

(a) Es sei a_n die Anzahl der verschiedenen Pflasterungen der Länge n. Geben Sie eine rekursive Formel für a_n an.

Hinweis: vgl. Beispiel 2.4.

(b) Zeigen Sie mithilfe Ihrer rekursiven Formel aus (a):

$$a_n = \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^n + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^n\right).$$

(c) Wie viele verschiedene Pflasterungen der Länge 10 gibt es? Geben Sie die genaue Anzahl an.

Musterlösung:

(a) Für eine Pflasterung der Länge 1 haben wir vier Steine zur Verfügung, also $a_1 = 4$.

Eine Pflasterung der Länge 2 können wir entweder mit zwei Fliesen der Länge 1 erreichen ($4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten) oder mit einer Fliese der Länge 2, wofür wir zwei Möglichleiten haben. Also gilt $a_2 = 16+2 = 18$.

Eine Pflasterung der Länge n können wir mit einer Fliese der Länge 1 beginnen (vier Möglichkeiten) und mit einer beliebigen Pflasterung der Länge $n-1$ fortsetzen. So ergeben sich $4a_{n-1}$ verschiedene Möglichkeiten.

Wir können eine Pflasterung der Länge n aber auch mit einer Fliese der Länge 2 beginnen (zwei Möglichkeiten). Daraus ergeben sich dann $2a_{n-2}$ Möglichkeiten.

Damit erhalten wir als Rekursionsformel:

$$a_1 = 4, a_2 = 18, a_n = 4a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

(b) Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Da die Rekursionsformel nur für $n \geq 3$ gilt, müssen wir für $n = 1$ **und** $n = 2$ die Korrektheit der Formel direkt beweisen. Dies stellt den Indukationsanfang dar.

$n = 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})\right) \\ = & \frac{1}{6}\left(6 + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 6 + 6 - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 6\right) \\ = & \frac{1}{6} \cdot 24 = 4 \end{aligned}$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2 + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^2\right) \\ = & \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{6})(10+4\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6})(10-4\sqrt{6})\right) \\ = & \frac{1}{6}\left(30 + 10\sqrt{6} + 12\sqrt{6} + 24 + 30 - 10\sqrt{6} - 12\sqrt{6} + 24\right) \\ = & \frac{1}{6} \cdot 108 = 18 \end{aligned}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n + 2a_{n-1} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{4}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^n + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^n\right) \\ &\quad + \frac{2}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^{n-1} + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{6}(3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^{n-1}\left(4(2+\sqrt{6}) + 2\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}(3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^{n-1}\left(4(2-\sqrt{6}) + 2\right) = (*) \end{aligned}$$

An dieser Stelle bietet sich eine kleine Nebenrechnung an. Es gilt

$$4(2+\sqrt{6}) + 2 = 10 + 4\sqrt{6} = 4 + 4\sqrt{6} + 6 = (2+\sqrt{6})^2$$

und

$$4(2-\sqrt{6}) + 2 = 10 - 4\sqrt{6} = 4 - 4\sqrt{6} + 6 = (2-\sqrt{6})^2.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{6}(3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^{n+1} + \frac{1}{6}(3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^{n+1} \\ &= \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^{n+1} + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^{n+1}\right). \end{aligned}$$

(c) Mit der Formel können wir leicht a_{10} ausrechnen. Es gilt

$$a_{10} = \frac{1}{6}\Big((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^{10} + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^{10}\Big) = 2762528.$$

Aufgabe 4 (Konvergenzkriterien für (Teil-)folgen)

Untersuchen Sie die folgende Folge auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Geben Sie im Falle der Konvergenz auch den Grenzwert an!

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$$

Musterlösung:

Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{n+3} < 1$$

ist die Folge beschränkt. Wegen $(-1)^n = (-1)^{n+1}(-1)^{-1} = -(-1)^{n+1}$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+4} - \frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{(-1)^{n+1}(n+3) - (-1)^n(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}}_{>0} \end{aligned}$$

gilt $a_{n+1}-a_n > 0$ für n ungerade und $a_{n+1}-a_n < 0$ für n gerade. Somit ist die Folge nicht monoton. Allerdings ist die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend und die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Wegen

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{n+3} \to 0$$

ist die Folge nach Sandwich-Lemma/Schachtelungsprinzip sowie Aufgabe 5 **(i)** eine Nullfolge, also konvergent mit Grenzwert 0.

Aufgabe 5 (Folge der Beträge)

(i) Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert!

(ii) Nennen Sie ein Beispiel für eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei jedoch die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert!

Musterlösung:

(i) Es gilt zunächst.

$$|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n| - 0|$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Falls es ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß $|a_n - 0| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, so gilt auch $||a_n| - 0| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ (mit demselben n_0) und umgekehrt.

(ii) $a_n = (-1)^n$