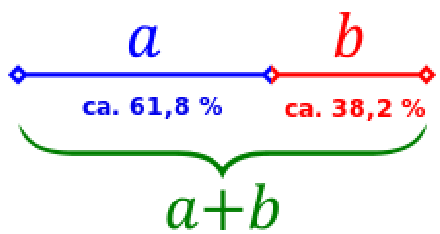
Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 4
SS 2020

Aufgabe 1 (Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt)



Das Teilungsverhältnis einer Strecke, wobei das Verhältnis der Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke gleich dem Verhältnis der größeren zur kleineren Teilstrecke ist, heißt *Goldener Schnitt*. In Formeln (siehe Abbildung):

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

(i) Bestimmen Sie dieses Teilungsverhältnis, also eine Zahl $\varphi \in \mathbb{R}_+$ so, daß

$$\varphi = \frac{a}{b}$$

(ii) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall_{n \geq 2}\ \varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

(iii) Betrachten Sie die Folge der Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ für $n = 1, ..., 8$. Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
Beweisen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Sie können voraussetzen, daß die Folge konvergiert!

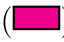
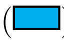
Aufgabe 2 (Grenzwertsätze)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen! Entscheiden Sie im Fall der Divergenz, ob die Folge bestimmt oder unbestimmt divergent ist!

(i) $\frac{2n^3-n^2+n+1}{n^3+n^2-n-3}$, **(ii)** $n \cdot \frac{1-4^{-n}}{3n+5}$, **(iii)** $\frac{\binom{n}{3}}{n^3}$, **(iv)** $n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n$,
(v) $\frac{n^2}{2^n}$, **(vi)** $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Tipp für Aufgabenteil **(v)**: Zeigen Sie zunächst mithilfe des Binomischen Lehrsatzes: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 2^n > \binom{n}{3}$.

Aufgabe 3 (Rekursiv definierte Folge)

Fliesenleger Jupp soll einen Weg der Länge n pflastern. Ihm stehen hierfür vier verschiedene Fliesentypen der Länge eins in den Farben rot (), grün (), blau () und gelb (), sowie zwei verschiedene Fliesentypen der Länge zwei in den Farben magenta () und türkis () zur Verfügung.

Jupp fragt sich, wie viele verschiedene Pflasterungen es für einen Weg der Länge n wohl gibt. Wir wollen ihm bei der Beantwortung dieser Frage helfen.

(a) Es sei a_n die Anzahl der verschiedenen Pflasterungen der Länge n. Geben Sie eine rekursive Formel für a_n an.

Hinweis: vgl. Beispiel 2.4.

(b) Zeigen Sie mithilfe Ihrer rekursiven Formel aus (a):

$$a_n = \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^n + (3-\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^n\right).$$

(c) Wie viele verschiedene Pflasterungen der Länge 10 gibt es? Geben Sie die genaue Anzahl an.

Aufgabe 4 (Konvergenzkriterien für (Teil-)folgen)

Untersuchen Sie die folgende Folge auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Geben Sie im Falle der Konvergenz auch den Grenzwert an!

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$$

Aufgabe 5 (Folge der Beträge)

(i) Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert!

(ii) Nennen Sie ein Beispiel für eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei jedoch die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert!

Aufgabe 6* (Grenzwertsätze)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen! Entscheiden Sie im Fall der Divergenz, ob die Folge bestimmt oder unbestimmt divergent ist!

(i) $\frac{-4n^5-3n^2+9n-n^4+1}{8n^5+n^4-n^3+n^2-2}$, **(ii)** $\frac{(cos(n\pi))^n}{n!}$, **(iii)** $\sqrt{n^2+n}-n$

Aufgabe 7* (Konvergenzkriterien für Folgen)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz auch jeweils den Grenzwert an!

(i) $a_n = \frac{n}{n^2+\pi}$

(ii) $b_n = \frac{n^2-1}{n}$

(iii) $c_n = \frac{3n-2n^2}{n^2+1}$

Aufgabe 8* (Konvergenzkriterien für (Teil-)folgen)

Untersuchen Sie die folgende rekursiv definierte Folge auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Geben Sie im Falle der Konvergenz auch den Grenzwert an!

$$b_0 = 1,\ b_n = \sqrt{1+b_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$$

Hinweis: Verwenden Sie zum Beweis der Beschränktheit und der Monotonie jeweils vollständige Induktion!