Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 3
SS 2020
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)

(i) Bestimmen Sie die arithmetische Darstellung von $z_1 \cdot \bar{z}_2$ für $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = -2 + i \in \mathbb{C}$.

(ii) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl

$$\frac{1-i}{1+i}$$

Musterlösung:

(i) Es gilt

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (4+3i)(-2-i) = -8 - 6i - 4i + 3 = -5 - 10i$$

(ii) Es gilt

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{1+1} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$$

Nach Vorlesung gilt $-i = e^{i\frac{3}{2}\pi} = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$, also lautet die Polarkoordinatendarstellung

$$(r, \varphi) = \left(1, \frac{3}{2}\pi\right)$$

Aufgabe 2 (Komplexe Potenzen)

Berechnen Sie

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{18}$$

Musterlösung:

Es gilt, da $\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) > 0$:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}^2)+1^2}{4}} = 1 \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Also gilt $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$, und somit lautet die Polardarstellung von z:

$$(r,\varphi) = \left(1, \frac{\pi}{6}\right)$$

Somit gilt für die Potenz:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{18} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{18} = e^{3\pi i} = e^{\pi i} = -1$$

Aufgabe 3 (Lösung algebraischer Gleichungen)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^7 - i - 1 = 0$$

Musterlösung:

Es gilt $z^7 - i - 1 = 0 \Leftrightarrow z^7 = i+1$. Bestimme also die sieben siebten Wurzeln von $w := i+1$. Die Polarkoordinatendarstellung von $i+1$ lautet $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, da $r = |-i+1| = \sqrt{2}$ und, da $\operatorname{Re}(i+1) = 1 > 0$,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Nach dem Satz von Moivre sind die sieben siebten Wurzeln einer komplexen Zahl in Polarkoordinatendarstellung gegeben durch

$$z_k = \sqrt[7]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{7}+\frac{2k\pi}{7}\right)},\ k = 0, ..., 6$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{28}} \\
z_1 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{8\pi}{28}\right)} = \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{28}} \\
z_2 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{16\pi}{28}\right)} = \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{17\pi}{28}} \\
z_3 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{24\pi}{28}\right)} = \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{25\pi}{28}} \\
z_4 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{32\pi}{28}\right)} = \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{33\pi}{28}} \\
z_5 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{40\pi}{28}\right)} = \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{41\pi}{28}} \\
z_6 &= \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{48\pi}{28}\right)} = \sqrt[14]{2} \cdot e^{i\frac{49\pi}{28}}
\end{aligned}$$

Für $j \in \{1, 9, 17, 25, 33, 41, 49\}$ gilt also:

$$z_j = \sqrt[14]{2}\cos\left(\frac{j\pi}{28}\right) + i\,\sqrt[14]{2}\sin\left(\frac{j\pi}{28}\right)$$

Aufgabe 4 (Konvergenz von Folgen)

Die Folge $a_n := \frac{n(n+3)-4}{n^2-1}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a := 1$. Bestimmen Sie für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\forall_{n \geq n_0}\ |a_n - a| \leq \varepsilon$$

Musterlösung:

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left|\frac{n(n+3)-4}{n^2-1} - 1\right| = \left|\frac{n^2+3n-4-(n^2-1)}{n^2-1}\right| = \left|\frac{n^2+3n-4-n^2+1}{n^2-1}\right| \\
&= \left|\frac{3n-3}{n^2-1}\right| = \left|\frac{3(n-1)}{n^2-1}\right| = \left|\frac{3(n-1)}{(n-1)(n+1)}\right| = \frac{3}{n+1} \leq \varepsilon \\
&\Leftrightarrow\ n \geq \frac{3}{\varepsilon} - 1
\end{aligned}$$

Wähle also $n_0 := \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$.