Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 2
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Ungleichungen)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen erfüllt? Verwenden Sie die bereits in der Vorlesung und in den Übungen bewiesenen Anordnungsregeln!

(i)
$$|2x+4| < 2, \ \ |5x-1| \geq 5$$

<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie zunächst, daß für alle $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$|a| < c \ \Leftrightarrow \ -c < a < c$$

und

$$|a| > c \ \Leftrightarrow \ a > c \ \vee \ a < -c$$

(ii)
$$||x-5|-3| \leq 4$$

Musterlösung:

(i) Zeige also zunächst die erste Hilfsaussage: $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$|a| < c \ \Leftrightarrow \ -c < a < c$$

für $a, c \in \mathbb{R}$.
<u>1. Fall:</u> $a \geq 0$. Dann gilt $|a| = a$, und die Ungleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn $a < c$.
<u>2. Fall:</u> $a < 0$. Dann gilt $|a| = -a$, und die Ungleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn $-a < c$, also $a > -c$.
Insgesamt ist die Ungleichung $|a| < c$ für alle $a \geq 0$ mit $a < c$ und für

alle $a < 0$ mit $a > -c$ erfüllt, also für $-c < a < c$.
Wende dieses Zwischenergebnis auf die eigentlich Ungleichung an. Es gilt:

$$\begin{aligned} & |2x+4| < 2 \\ \Leftrightarrow\quad & -2 < 2x+4 < 2 \\ \Leftrightarrow\quad & -6 < 2x < -2 \\ \Leftrightarrow\quad & -3 < x < -1 \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-3 < x < -1$ erfüllt. Die Lösungsmenge ist also das offene Intervall $(-3, -1)$.

Zeige nun die zweite Hilfsaussage: $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$|a| > c \;\Leftrightarrow\; a > c \;\vee\; a < -c$$

für $a, c \in \mathbb{R}$.
<u>1. Fall:</u> $a \geq 0$. Dann gilt $|a| = a$, und die Ungleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn $a > c$.
<u>2. Fall:</u> $a < 0$. Dann gilt $|a| = -a$, und die Ungleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn $-a > c$, also $a < -c$.
Insgesamt ist die Ungleichung $|a| > c$ für alle $a \geq 0$ mit $a > c$ und für alle $a < 0$ mit $a < -c$ erfüllt, also für $a > c \;\vee\; a < -c$.
Wende dieses Zwischenergebnis auf die eigentlich Ungleichung an. Es gilt:

$$\begin{aligned} & |5x-1| \geq 5 \\ \Leftrightarrow\quad & 5x-1 \geq 5 \;\vee\; 5x-1 \leq 5 \\ \Leftrightarrow\quad & 5x \geq 6 \;\vee\; 5x \leq -4 \\ \Leftrightarrow\quad & x \geq \frac{6}{5} \;\vee x \leq -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{6}{5} \;\vee x \leq -\frac{4}{5}$ erfüllt. Die Lösungsmenge ist also $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right] \;\cup\; \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$.

(ii) <u>1. Fall:</u> $x \geq 5$. Dann gilt $|x-5| = x-5$ und somit

$$\begin{aligned} & |x-5-3| \leq 4 \\ \Leftrightarrow\quad & |x-8| \leq 4 \\ \overset{(i)}{\Leftrightarrow}\quad & -4 \leq x-8 \leq 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 \leq x \leq 12 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung, daß $x \geq 5$ ist, gilt für die Lösungsmenge des 1. Falls:

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \;\mid\; 5 \leq x \leq 12\} = [5, 12]$$

2. Fall: $x < 5$. Dann gilt $|x-5| = -(x-5) = 5-x$ und somit

$$\begin{aligned} & |5-x-3| \leq 4 \\ \Leftrightarrow \quad & |2-x| \leq 4 \\ \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \quad & -4 \leq 2-x \leq 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -6 \leq -x \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 6 \geq x \geq -2 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung, daß $x < 5$ ist, gilt für die Lösungsmenge des 2. Falls:

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \ | \ -2 \leq x < 5\} = [-2, 5)$$

Für die Gesamtlösungsmenge der Ungleichung gilt

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \ \cup \ \mathbb{L}_2 = [-2, 12]$$

Aufgabe 2 (Wurzeln)

Zeigen Sie, daß $\sqrt{12}$ nicht rational ist.

Musterlösung:

Falls man versucht, analog zu $\sqrt{2}$ wie in der Vorlesung vorzugehen, wird man feststellen, daß das nicht geht, da 12 keine Primzahl ist und die Primfaktorzerlegung von 12 nicht aus teilerfremden Zahlen besteht. Also wird hier anders vorgegangen:

(durch Widerspruch) Ann.: Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 12$. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$, mit $x = \frac{p}{q}$, wobei $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{p^2}{q^2} = 12 \\ \Rightarrow p^2 &= 12q^2 \\ \Rightarrow 12 &\mid p^2 \end{aligned}$$

Da 12 keine Primzahl ist, muß hier anderweitig als bei $\sqrt{2}$ argumentiert werden: Die Primfaktorzerlegung für 12 lautet $12 = 2^2 \cdot 3$. Also gilt sowohl $2 \mid p^2$ als auch $3 \mid p^2$. Da 2 und 3 Primzahlen sind, folgt sowohl $2 \mid p$ als auch $3 \mid p$[1]. Da 2 und 3 als Primzahlen teilerfremd sind, ist auch deren Produkt ein Teiler von p. Also gilt

$$6 \mid p \Rightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ p = 6k$$

[1]**Ergänzender Hinweis:** Nach dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie lässt sich jede natrliche Zahl $a > 1$ eindeutig in Primfaktoren zerlegen. Sei $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von a, dann gilt $a^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$. Ist also ein Primfaktor p_i von a^2 bekannt und es gilt $a > 1$, dann muss p_i auch mindestens einmal in der Primfaktorzerlegung von a vorkommen.

und damit:

$$\begin{aligned} 36k^2 &= 12q^2 \\ \Rightarrow 3k^2 &= q^2 \\ \Rightarrow 3 &\mid q^2 \\ \Rightarrow 3 &\mid q \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß 3 sowohl ein Teiler von p als auch ein Teiler von q ist. Das ist ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$. Damit ist die Annahme falsch, und somit kann $\sqrt{12}$ nicht rational sein.

Alternative Lösung: Es gilt: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
Ann.: $2\sqrt{3}$ ist rational. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$, mit $2\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, wobei $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$. Dann gilt aber auch $\sqrt{3} = \frac{p}{2q}$, und damit wäre $\sqrt{3}$ auch rational. Man kann jedoch analog zu $\sqrt{2}$ (siehe Vorlesung) zeigen, daß auch $\sqrt{3}$ nicht rational ist, was zum Widerspruch führt.

Aufgabe 3 (Supremum/Infimum/Minimum/Maximum)

Bestimmen Sie, falls existent, Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen:

(i) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 5\}$

(ii) $B := \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(iii) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 < 0\}$

(iv) $D := \left\{n\left((-1)^n - 1\right) - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Musterlösung:

(i) $\sup(A) = 5, \inf(A) = -3$. Da $-3 \in A$, gilt auch $\min(A) = -3$, da jedoch $5 \notin A$, hat A kein Maximum.

(ii) Das Maximum dieser Menge wird für $n = m = 1$ erreicht, es liegt bei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$. Für $m, n > 1$ erhält man kleinere Werte als 2. Da man für immer größer werdende n und m beliebig nahe an 0 herankommt, aber 0 nie erreicht, gilt $\inf(B) = 0$, ein Minimum existiert allerdings nicht.

(iii) Wegen $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1, 4)$, gilt $\inf(C) = -1$ und $\sup(C) = 4$. Da jedoch $-1, 4 \notin C$, hat C weder Minimum noch Maximum.

(iv) Wir betrachten hier eine Fallunterscheidung:

<u>1. Fall:</u> n ungerade, also $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$(2k+1)(\underbrace{(-1)^{2k+1} - 1}_{=-2}) - \frac{1}{2k+1} = -4k - 2 - \frac{1}{2k+1}$$

Da $-4k$ für große k beliebig klein wird, gibt es weder Infimum noch Minimum.

<u>2. Fall:</u> n gerade, also $n = 2k, k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$2k(\underbrace{(-1)^{2k} - 1}_{=0}) - \frac{1}{2k} = -\frac{1}{2k} < 0$$

Also ist 0 eine obere Schranke für D. Da man für immer größer werdende k immer näher an die 0 herankommt, sie aber nie erreicht, gilt $\sup(D) = 0$, ein Maximum existiert allerdings nicht.