**Hochschule Bonn-Rhein-Sieg**
*University of Applied Sciences*

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

# Analysis

## Übungsblatt 1

## Sommersemester 2020
## – Musterlösungen –

**Aufgabe 1 (Anordnungsaxiome)**

Sei $\mathcal{K}$ ein angeordneter Körper, 0 das neutrale Element bzgl. der Addition und 1 das neutrale Element bzgl. der Multiplikation. Es seien weiterhin $a, b, c \in \mathcal{K}$. Zeigen Sie:

**(i)** $a \geq b \Leftrightarrow -a \leq -b$

**(ii)** $c < 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{c} \leq b \Leftrightarrow a \geq bc\right)$

**(iii)** $a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$

**(iv)** $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

**Musterlösung:**

**(i)** '$\Rightarrow$': Es gelte $a \geq b$. Aufgrund des Anordnungsaxioms

$$b \leq a \Rightarrow \forall_{d \in \mathcal{K}}\ b + d \leq a + d$$

(Monotonie bzgl. '+') folgt dann:

$$\begin{aligned} a \geq b \ \Rightarrow b \leq a \quad &\Rightarrow \quad 0 = b + (-b) \leq a + (-b) \\ &\overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} \quad -a \leq (-a) + a + (-b) \\ &\Rightarrow \quad -a \leq -b \end{aligned}$$

was zu zeigen war.
'$\Leftarrow$': Es seien $\tilde{a} := -a$ und $\tilde{b} := -b$. Dann gilt nach Voraussetzung $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ bzw. $\tilde{b} \geq \tilde{a}$. Dann folgt genau wie im Beweis von '$\Rightarrow$': $-\tilde{b} \leq -\tilde{a}$, also $b \leq a$ bzw. $a \geq b$, was zu zeigen war.

**(ii)** Wegen $c < 0$ gilt $-c > 0$ (folgt aus **(i)** für $a = 0$ und $b = c$, Gleichheit ist ausgeschlossen). Eine Rechenregel aus der Vorlesung, die aus dem Anordnungsaxiom Monotonie bzgl. '$\cdot$' folgt, besagt, daß für $d > 0$ gilt:

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot d \leq b \cdot d$$

Die Rückrichtung gilt auch und läßt sich sofort durch Widerspruch mit der Annahme $a > b$ beweisen: Dann folgt nämlich $b < a$ und somit $b \cdot d < a \cdot b$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $a \cdot b \leq b \cdot d$ ist. Also gilt die Äquivalenz und somit:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \\ &\Leftrightarrow -(a \cdot c) \leq -(b \cdot c) \\ &\Leftrightarrow ac \geq bc && \text{wegen } \mathbf{(i)} \end{aligned}$$

Wegen $c < 0$ gilt nach Vorlesung auch $c^{-1} < 0$ und somit:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{c} = a \cdot c^{-1} \leq b \\ &\quad \Leftrightarrow a \cdot c^{-1} \cdot c \geq b \cdot c \\ &\quad \Leftrightarrow a \geq b \cdot c \end{aligned}$$

**(iii)** '$\Rightarrow$': Sei $a \cdot b \geq 0$. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Wir nehmen an, daß eine der Variablen echt positiv und die andere echt negativ ist, also oBdA $a > 0 \wedge b < 0$. Dann folgt, da $0 \leq a,\ b < 0$:

$$\begin{aligned} 0 \cdot b &\geq a \cdot b && \text{nach dem Teilbeweis aus } \mathbf{(ii)} \\ \Rightarrow a \cdot b &\leq 0 \\ \Rightarrow a \cdot b &< 0 && \text{da } \mathbb{R} \text{ nullteilerfrei und } a, b \neq 0 \text{ nach Vor.} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Vor. $a \cdot b \geq 0$, also war die Annahme falsch.
'$\Leftarrow$': Aufgrund des '$\vee$' machen wir die folgenden Fallunterscheidung:
<u>1. Fall:</u> $a \geq 0 \wedge b \geq 0$. Dann folgt sofort $a \cdot b \geq 0$ aufgrund des Anordnungsaxioms über die Monotonie bzgl. $\cdot$.
<u>2. Fall:</u> $a \leq 0 \wedge b \leq 0$. Dann folgt nach **(i)**: $-a \geq 0 \wedge -b \geq 0$ und somit wie oben $(-a) \cdot (-b) \geq 0$. Somit gilt, da $\mathbb{R}$ kommutativ:

$$0 \leq (-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b = a \cdot b$$

In beiden Fällen konnten wir also $a \cdot b \geq 0$ folgern, was zu zeigen war.

**(iv)** Der Beweis erfolgt mithilfe der Aussagenlogik und **(iii)**:

$$\begin{aligned} a \cdot b < 0 \Leftrightarrow &\quad \neg(a \cdot b \geq 0) \\ \Leftrightarrow &\quad \neg\left((a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)\right) && \text{nach } \mathbf{(iii)} \\ \Leftrightarrow &\quad (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0) \end{aligned}$$

## Aufgabe 2 (Binomische Formel)

**(i)** Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge an. Das entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Urne mit $n$ verschiedenen Kugeln $k$ Kugeln zu ziehen, wobei die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle spielt (mathematisch nennt man das auch $(n, k)$-*Kombinationen ohne Wiederholung*). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim *Lotto* 6 *aus* 49 sechs Richtige anzukreuzen?

**(ii)** Beweisen Sie die Rekursionsgleichung

$$\binom{0}{0} = 1, \ \binom{1}{0} = 1, \ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{für } n \geq k \geq 0, \, n \geq 2$$

**(iii)** Die Rekursionsgleichung aus **(ii)** ist die Grundlage für das so genannte *Pascalsche Dreieck*:

| $n$ | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{4}$ | $\binom{n}{5}$ | $\binom{n}{6}$ | $\binom{n}{7}$ | $\binom{n}{8}$ | $\binom{n}{9}$ | $\binom{n}{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| $\vdots$ | | | | | | $\ldots$ | | | | | |

Der Wert, der in der $n$-ten Zeile und der $k$-ten Spalte steht, ergibt sich als Summe der beiden Werte, die in der Zeile darüber, also in der $(n-1)$-ten Zeile, und dort in derselben Spalte und in der Spalte davor, also in der $k$-ten und der $(k-1)$-ten Spalte stehen.

Ermitteln Sie mithilfe des Pascalschen Dreiecks die Binomialkoeffizienten $\binom{3}{2}$, $\binom{9}{6}$ und $\binom{7}{5}$.

**(iv)** Beweisen Sie die Binomische Formel, also zeigen Sie, daß für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**Hinweise:**
Verwenden Sie vollständige Induktion sowie die Rekursionsgleichung aus **(ii)**)! Führen Sie eine oder mehrere Indexverschiebungen durch!

**(v)** Berechnen Sie mithilfe von **(iv)** die Binome $(a+b)^5$ und $(a+b)^6$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

**(vi)** Beweisen Sie mithilfe der Binomischen Formel:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

**(vii)** Zeigen Sie:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

**Musterlösung:**

**(i)** Wir müssen die Anzahl der $(49, 6)$-Kombinationen ohne Wiederholung bestimmen:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 22 \cdot 3 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 49 = 13\,983\,816$$

6 Zahlen aus 49 zu ziehen; die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige ist also 1 zu 13 983 816.

**(ii)** Wir rechnen mithilfe von Bruchrechnung:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (k + (n-k))}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

**(iii)** Es gilt $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{9}{6} = 84$ und $\binom{7}{5} = 21$.

**(iv)** Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt:
Induktionsanfang ($n = 0$):

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Nehme an, daß für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ (IV)}$$

und zeige, daß die Aussage dann auch für $n+1$ erfüllt ist, also daß gilt:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Dazu:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-(k-1)} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-(k-1)} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \text{ (Indexverschiebung)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \text{ (wegen obiger Gleichung)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} \text{ (Indexverschiebung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

**(v)** Es gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{aligned}$$

Auch hierbei lassen sich die Koeffizienten wieder direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen.

**(vi)** Setze in der binomischen Formel $a = b = 1$, und es ergibt sich

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

**(vii)** Wähle in der binomischen Formel $a = 1$ und $b = -1$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$$