Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 13
SS 2020
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Eine Gleichung der Form

$$F(x, u, u', u'', ..., u^{(n)}) = 0$$

in den Ableitungen einer unbekannten Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto u(x)$, bis zur Ordnung $n \in \mathbb{N}$, heißt *gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL) n-ter Ordnung*. Versuchen Sie doch mal, die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2\lambda u(x) = 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

zu lösen. Das ist die sog. *Hermitesche Differentialgleichung*. Verwenden Sie hierzu den *Potenzreihenansatz*

$$u(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k,\ \ a_k \in \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Sie brauchen nicht zu zeigen, daß der Konvergenzradius größer als 0 ist!

Musterlösung:

Der Potenzreihenansatz liefert für die Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cdot k(k-1)}{k!} x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cdot k}{k!} x^{k-1} + 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{(k-2)!} x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} x^{k-1} + 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+2}}{k!} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{(k-1)!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\lambda a_k}{k!} x^k &= 0 \\
\Leftrightarrow a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+2}}{k!} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{(k-1)!} x^k + 2\lambda a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda a_k}{k!} x^k &= 0 \\
\Leftrightarrow a_2 + 2\lambda a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k+2}}{k!} - \frac{2k a_k}{k!} + \frac{2\lambda a_k}{k!} \right) x^k &= 0
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$
\begin{aligned}
a_2 + 2\lambda a_0 &= 0 \\
\frac{a_{k+2}}{k!} - \frac{2k a_k}{k!} + \frac{2\lambda a_k}{k!} &= 0, \ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

bzw. die Rekursionsformel:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -2\lambda a_0 \\
a_{k+2} &= (2\lambda - 2k) a_k, \ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Jetzt könnte man noch versuchen, mit den bekannten Methoden eine explizite Darstellung dieser Folge herzuleiten.

Aufgabe 2 (Uneigentliche Integrale)

Existiert das folgende uneigentliche Integral? Wenn ja, berechnen Sie seinen Wert!

$$\int_1^{\infty} x e^{-2x} \, dx$$

Musterlösung:

Da es sich um ein uneigentliches Integral handelt, ersetze zunächst die obere Integralgrenze durch ein $b > 0$ und bilde anschließend den Grenzwert für $b \to \infty$. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}\int_1^b xe^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}xe^{-2x}\,\Big|_1^b + \frac{1}{2}\int_1^b e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2x}\,\Big|_1^b\right) \\ &= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2b} - e^{-2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{1}{4e^2}\end{aligned}$$

Da sich die e-Funktion gegenüber einem Polynom durchsetzt, gilt $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}be^{-2b} = 0$. Somit existiert das uneigentliche Integral mit dem Wert

$$\int_1^\infty xe^{-2x}\,dx = -0 + \frac{1}{2e^2} - 0 + \frac{1}{4e^2} = \frac{3}{4e^2}$$

Aufgabe 3 (Gradient und Richtungsableitung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \sin\left(x^2 + \log\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,1)$ in Richtung der Winkelhalbierenden der xy-Ebene!

Musterlösung:

(a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\left(x^2 + \log\left(\frac{x}{y}\right)\right)\cdot\left(2x + \frac{1}{x}\right) \\ \cos\left(x^2 + \log\left(\frac{x}{y}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\end{pmatrix} = \cos\left(x^2 + \log\left(\frac{x}{y}\right)\right)\begin{pmatrix} 2x + \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{y}\end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}D_v f(1,-1) &= \left\langle \nabla f(1,1), \frac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|}\right\rangle = \cos(1)\cdot\left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \frac{\cos(1)}{\sqrt{2}}(3-1) = \cos(1)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Lokale Extrema und Sattelpunkte im $\mathbb{R}^N$)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := -x^2y + 6xy - xy^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte!

Musterlösung:

Für den Gradienten von f gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy + 6y - y^2 \\ -x^2 + 6x - 2xy \end{pmatrix}$$

Setze diesen gleich dem Nullvektor. Dann muß gelten:

$$\begin{aligned} & -2xy + 6y - y^2 = 0 \Leftrightarrow \quad -2x + 6 - y = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = -2x + 6 \end{aligned}$$

im Falle $y \neq 0$. Setze dieses Resultat in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 2xy &= -x^2 + 6x - 2x(-2x+6) \\ &= -x^2 + 6x + 4x^2 - 12x = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee \ x = 2 \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = 6$. Also ist $(0,6)$ ein stationärer Punkte von f.
Für $x = 2$ gilt $y = 2$. Also ist auch $(2,2)$ ein stationärer Punkt von f.
Im Falle $y = 0$ gilt aufgrund der zweiten Gleichung $-x^2+6x = x(6-x) = 0$.
Also sind $(0,0)$ und $(6,0)$ ebenfalls stationäre Punkte.
Für die Hesse-Matrix von f gilt:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x+6-2y \\ -2x+6-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Weiterhin:

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -36 < 0$. Es liegt also weder der Fall $> 0, > 0$ noch der Fall $< 0, > 0$ vor. Da $H_2 \neq 0$, ist $D^2f(0,0)$ somit indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$D^2f(0,6) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = -12 < 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -36 < 0$. Es liegt also weder der Fall $> 0, > 0$ noch der Fall

$< 0, > 0$ vor. Da $H_2 \neq 0$, ist $D^2 f(0,6)$ somit indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$D^2 f(6,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -144 < 0$. Es liegt also weder der Fall $> 0, > 0$ noch der Fall $< 0, > 0$ vor. Da $H_2 \neq 0$, ist $D^2 f(6,0)$ somit indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$D^2 f(2,2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = -4 < 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -12 > 0$. Es liegt also der Fall $< 0, > 0$ vor. Somit ist $D^2 f(2,2)$ negativ definit, und es liegt ein Maximum vor.

Aufgabe 5* (Uneigentliche Integrale)

Existiert das folgende uneigentliche Integral? Wenn ja, berechnen Sie seinen Wert!

$$\int_2^\infty \frac{4(x-2)}{x(x^2-4)}\, dx$$

Aufgabe 6* (Differentialrechnung im $\mathbb{R}^N$)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := x^3 - 2x^2y^2 + y^4 + 10$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,1)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Untersuchen Sie f auf Sattelpunkte und lokale Extrema!

Aufgabe 7* (Differentialrechnung im $\mathbb{R}^N$)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := (x^2 + y^2)e^{xy}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 1)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Untersuchen Sie f auf Sattelpunkte und lokale Extrema!